



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A03
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

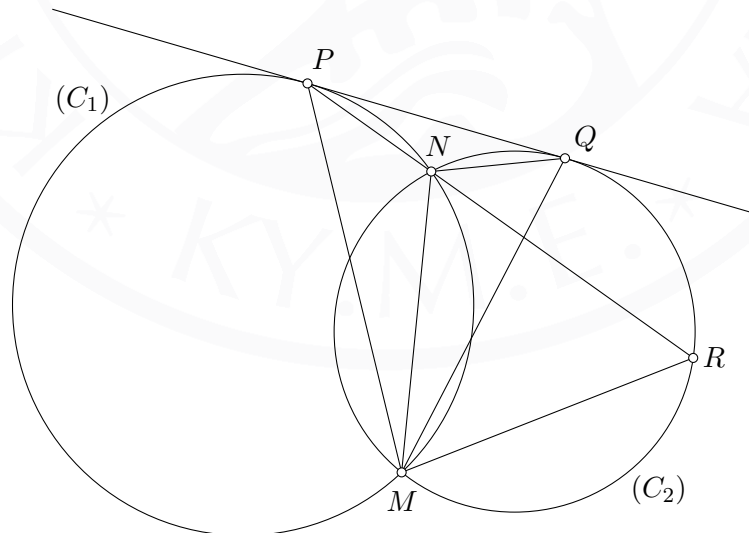
Πρόβλημα

Η κοινή εφαπτομένη δύο τεμνόμενων κύκλων (C_1) και (C_2) εφάπτεται στον κύκλο (C_1) στο σημείο P και στον κύκλο (C_2) στο σημείο Q , αντίστοιχα. Οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία M και N , με το N να βρίσκεται πλησιέστερα στην PQ από το M . Η ευθεία PN τέμνει ξανά τον κύκλο (C_2) στο σημείο R . Να δείξετε ότι η MQ διχοτομεί την $\angle PMR$.

Πηγή: Μεγάλη Βρετανία 2000

Προτεινόμενη Λύση

Έχουμε $\angle QMR = \angle QNR$, ως εγγεγραμμένες γωνίες στον κύκλο (C_2) που βαίνουν στο ίδιο τόξο και $\angle QNR = \angle NPQ + \angle PQN$, αφού η $\angle QNR$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο NPQ .



Από το Θεώρημα Χορδής-Εφαπτομένης, έχουμε $\angle NPQ = \angle NMP$ και $\angle PQN = \angle QMN$. Τελικά, έχουμε:

$$\angle QMP = \angle QMN + \angle NMP = \angle PQN + \angle NPQ = \angle QNR = \angle QMR$$