



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A05

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού 2017 ώστε

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

για κάθε $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2017\}$. Να υπολογιστεί το $P(2018)$.

Πηγή: Ηνωμένες Πολιτείες 1975 (Παρόμοια)

Προτεινόμενη Λύση

Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Το $Q(x)$ είναι βαθμού 2018 και ικανοποιεί $Q(k) = 0$ για κάθε $k \in \{0, 1, \dots, 2017\}$. Επομένως

$$Q(x) = Cx(x-1)\cdots(x-2017)$$

για κάποια σταθερά C . Επειδή $Q(-1) = 1 = C(-1)^{2018}(2018!)$, πρέπει $C = \frac{1}{2018!}$. Οπότε $Q(2018) = 1$ και άρα $P(2018) = 1$.