



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A06

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Ναδειχθεί ότι υπάρχουν 100 διαδοχικοί αριθμοί ώστε κάθε ένας να διαιρείται από ένα τέλειο τετράγωνο μεγαλύτερο του 1.

Προτεινόμενη Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:

Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων

Έστω θετικός ακέραιος k , ακέραιοι αριθμοί $n_1, \dots, n_k$, και ανά δύο σχετικώς πρώτοι θετικοί ακέραιοι $m_1, \dots, m_k$. Τότε το σύστημα ισοδυναμιών

$$x \equiv n_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv n_2 \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$x \equiv n_k \pmod{m_k}$$

έχει λύση. Επιπλέον, η λύση είναι μοναδική $\pmod{M}$, όπου $M = m_1 \cdots m_k$.

Έστω $p_1, \dots, p_{100}$ διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί. Αρκεί να δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε φυσικό N ώστε ο $N + k$ να διαιρείται από τον p_k^2 για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, 100\}$. Θέλουμε δηλαδή να ισχύει ότι

$$N \equiv -k \pmod{p_k^2}$$

για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, 100\}$. Αυτό όμως είναι άμεσο από το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων αφού οι $p_1^2, \dots, p_{100}^2$ είναι ανά δύο σχετικώς πρώτοι.