



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A08

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να εξεταστεί για ποιους φυσικούς αριθμούς n υπάρχει μετάθεση $a_1, a_2, \dots, a_n$ των $1, 2, \dots, n$ ώστε οι αριθμοί

$$0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + \dots + a_n$$

να έχουν ανά δύο διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν με τον $n + 1$.

Πηγή: Καναδάς 2013

Προτεινόμενη Λύση

Για n άρτιο, έστω $n = 2m$, έχουμε:

$$a_1 + \dots + a_n = 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = m(2m+1) \equiv 0 \pmod{n+1}$$

Δηλαδή, το 0 και το $a_1 + \dots + a_n$, αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το $n + 1$.

Έστω λοιπόν n περιττός, ας πούμε $n = 2m - 1$. Θα κατασκευάσουμε κατάλληλη μετάθεση. Ισχυριζόμαστε ότι μια τέτοια μετάθεση είναι η:

$$1, 2m - 2, 3, 2m - 4, \dots, 2m - 3, 2, 2m - 1$$

Δηλαδή έχουμε εναλλάξ περιττούς και άρτιους, με τους περιττούς να είναι σε αύξουσα σειρά και τους άρτιους σε φθίνουσα. Τα αθροίσματα

$$0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + \dots + a_n$$

όταν διαιρεθούν με τον $n + 1 = 2m$ αφήνουν υπόλοιπα

$$0, 1, -1, 2, -2, \dots, (m-1), -(m-1), m$$

αντίστοιχα, τα οποία είναι όλα διαφορετικά ανά δύο.

Για να δείξουμε ότι αυτά είναι όντως τα υπόλοιπα, παρατηρούμε ότι στην μετάθεση που γράψαμε, κάθε δυο συνεχόμενοι αριθμοί έχουν άθροισμα $2m - 1 \equiv -1 \pmod{2m}$ αν ξεκινούν από περιττή θέση, και άθροισμα $2m + 1 \equiv 1 \pmod{2m}$ αν ξεκινούν από άρτια

θέση. Οπότε σε κάθε δυο βήματα το υπόλοιπο $\text{mod } m$ είτε μειώνεται είτε αυξάνεται κατά 1 αντιστοίχως.

