



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A09

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{n=1}^{100} \frac{n}{n^4 + 4}$.

Προτεινόμενη Λύση

Από το αποτέλεσμα του προβλήματος GYM2017-C07 έχουμε ότι:

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^4 + 4} &= \frac{n}{(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{n^2 - 2n + 2} - \frac{1}{n^2 + 2n + 2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(n-1)^2 + 1} - \frac{1}{(n+1)^2 + 1} \right] \end{aligned}$$

Οπότε τηλεσκοπικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} \frac{n}{n^4 + 4} &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{100} \left[\frac{1}{(n-1)^2 + 1} - \frac{1}{(n+1)^2 + 1} \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{n^2 + 1} - \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{101} \frac{1}{n^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{100^2 + 1} - \frac{1}{101^2 + 1} \right] \end{aligned}$$