



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A12

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω θετικός ακέραιος n και ένα σύνολο S από n ακεραίους. Ναδειχθεί ότι το S έχει ένα μη κενό υποσύνολο T , ώστε το άθροισμα των στοιχείων του T να είναι πολλαπλάσιο του n .

Προτεινόμενη Λύση

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τα στοιχεία του S . Κοιτάμε τους αριθμούς

$$\begin{aligned}s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ s_n &= x_1 + \dots + x_n\end{aligned}$$

Αν κάποιος από αυτούς τους αριθμούς είναι πολλαπλάσιο του n τότε τελειώσαμε. Αν όχι τότε κοιτάμε τα υπόλοιπα αυτών των αριθμών όταν διαιρεθούν με τον n . Υπάρχουν n αριθμοί και το πολύ $n - 1$ υπόλοιπα. (Αφού θεωρήσαμε ότι δεν υπάρχει αριθμός που να αφήνει υπόλοιπο 0.) Άρα από την αρχή του περιστερώνα δύο από τους αριθμούς, έστω οι s_i και s_j με $i < j$ αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. Τότε όμως ο

$$s_j - s_i = x_{i+1} + \dots + x_j$$

είναι πολλαπλάσιο του n και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Σχόλιο: Η αρχή του περιστερώνα λέει το εξής:

Αρχή περιστερώνα

Αν έχουμε περισσότερα από kn περιστέρια τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε n περιστερώνες, τότε σε ένα περιστερώνα θα τοποθετήσουμε περισσότερα από k περιστέρια. Ομοίως αν έχουμε λιγότερα από kn περιστέρια τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε n περιστερώνες, τότε σε ένα περιστερώνα θα τοποθετήσουμε λιγότερα από k περιστέρια.

Παρόλο που το πιο πάνω είναι προφανές, εντούτοις βρίσκει αρκετές εφαρμογές όπως και στο πιο πάνω πρόβλημα.

