



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A14

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού $2003^{2002^{2001}}$. [Με το a^{b^c} δηλώνουμε τον αριθμό $a^{(b^c)}$.]

Πηγή: Καναδάς 2003

Προτεινόμενη Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:

Θεώρημα Euler

Έστω πρώτοι μεταξύ τους θετικοί ακέραιοι a, n . Τότε:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Εδώ, το $\varphi(n)$ είναι η συνάρτηση του Euler και συμβολίζει το πλήθος των αριθμών του συνόλου $\{1, 2, \dots, n-1\}$ οι οποίοι είναι σχετικά πρώτοι ως προς τον n . Αν $p_1, \dots, p_k$ είναι οι πρώτοι διαιρέτες του n , τότε μπορεί ναδειχθεί ότι

$$\varphi(n) = \left(\frac{p_1 - 1}{p_1} \right) \cdots \left(\frac{p_k - 1}{p_k} \right) n$$

Ειδική περίπτωση είναι το μικρό θεώρημα του Fermat το οποίο λέει ότι αν p πρώτος και ο a δεν είναι πολλαπλάσιο του p τότε:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Έχουμε

$$2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{2002^{2001}} \pmod{1000}$$

Επειδή $\varphi(1000) = 400$, θα υπολογίσουμε αρχικά το $2002^{2001} \pmod{400}$. Επειδή $400 = 16 \cdot 25$, από το Κινέζικο Θεώρημα (το είδαμε στο πρόβλημα [OLY2017-A06](#)) αρκεί να

υπολογίσουμε τα $2002^{2001} \bmod 16$ και $2002^{2001} \bmod 25$. Προφανώς είναι:

$$2002^{2001} \equiv 0 \bmod 16$$

Επίσης, αφού $\varphi(25) = 20$ και $2001 = 100 \cdot 20 + 1$, τότε:

$$2002^{2001} \equiv 2^{2001} \equiv (2^{20})^{100} \cdot 2^1 \equiv 2 \bmod 25$$

Παρατηρούμε ότι $3 \cdot 16 = 48 \equiv -2 \bmod 25$ και άρα:

$$22 \cdot 16 \equiv (-3) \cdot 16 \equiv 2 \bmod 25$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$2002^{2001} \equiv 22 \cdot 16 = 352 \bmod 400,$$

και άρα:

$$2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{352} \bmod 1000$$

Όμως από το διωνυμικό θεώρημα παίρνουμε:

$$3^{352} = 9^{176} = (10 - 1)^{176} \equiv 1 - 10 \binom{176}{1} + 10^2 \binom{176}{2} \bmod 1000$$

(Αγνοήσαμε τους υπόλοιπους όρους αφού είναι πολλαπλάσια του 1000.)

Επειδή το $\binom{176}{2} = \frac{176 \cdot 175}{2}$ είναι πολλαπλάσιο του 10, καταλήγουμε στο:

$$2003^{2002^{2001}} \equiv 1 - 1760 \equiv 241 \bmod 1000$$

Δηλαδή ο $2003^{2002^{2001}}$ τελειώνει σε 241.