



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A15
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

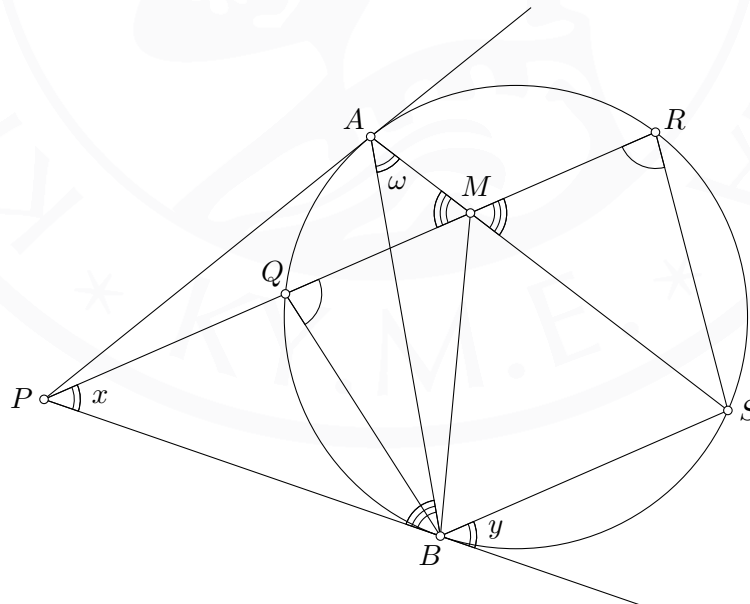
Πρόβλημα

Από ένα εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου φέρουμε τις εφαπτομένες PA και PB και μια τέμνουσα PQR του κύκλου. Φέρουμε τη χορδή BS παράλληλη στην PQR . Να αποδείξετε ότι η SA διχοτομεί τη χορδή QR .

Πηγή: Παναφρική Μαθηματική Ολυμπιάδα, 2000

Προτεινόμενη Λύση

Έστω ότι η AS τέμνει την QR στο σημείο M . Αρκεί να αποδείξουμε ότι $MQ = MR$. Φέρουμε τις AB και MB .



Επειδή $BS \parallel PR$, έχουμε ότι $\angle x = \angle y$. Όμως $\angle y = \angle \omega$, οπότε $\angle x = \angle \omega$. Αυτό σημαίνει ότι το τετράπλευρο $PAMB$ είναι εγγράψιμο. Συνεπώς, έχουμε:

$$\angle SMR = \angle AMP = \angle ABP = \angle BAP = \angle BMP = \angle BMQ \quad (1)$$

Φέρουμε και τα BQ, SR , τα οποία είναι ίσα, αφού $BS \parallel QR$. Έτσι, το $BSRQ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Τώρα, τα τρίγωνα $\triangle BQM$ και $\triangle SMR$ είναι ίσα, διότι:

- $BQ = SR$
- $\angle BMQ \stackrel{(1)}{=} \angle SMR$
- $\angle MQB = \angle MRS$

Από την ισότητα των τριγώνων, προκύπτει ότι $MQ = MR$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

