



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A17
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

Πρόβλημα

Οι πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν την σχέση $a^3 + b^3 + 3ab = 1$. Να υπολογίσετε την τιμή του $a + b$.

Πηγή: Κίνα 2004

Προτεινόμενη Λύση

Έστω $a + b = x$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3ab &= 1 \Rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab - 1 = 0 \\ &\Rightarrow (a + b) \left[(a + b)^2 - 3ab \right] + 3ab - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x(x^2 - 3ab) + 3ab - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x^3 - 3abx + 3ab - 1 = 0 \end{aligned}$$

Αφού

$$\begin{aligned} x^3 - 3abx + 3ab - 1 &= x^2(x - 1) + (x - 1)(x + 1) - 3ab(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1 - 3ab), \end{aligned}$$

έχουμε ότι $(x - 1)(x^2 + x + 1 - 3ab) = 0$.

- Όταν $x - 1 = 0$, έχουμε $a + b = 1$.
- Όταν $x^2 + x + 1 - 3ab = 0$, έχουμε:

$$(a + b)^2 + a + b + 1 - 3ab = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - ab + a + b + 1 = 0$$

Συμπληρώνοντας τετράγωνα, παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} \left[(a - b)^2 + (a + 1)^2 + (b + 1)^2 \right] = 0$$

Επομένως, $a = b = -1$ και $a + b = -2$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι οι $a + b = 1$ και $a + b = -2$ επαληθεύουν την αρχική σχέση.