



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A18
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

Πρόβλημα

Να προσδιορίσετε όλους τους πρώτους αριθμούς p τέτοιους, ώστε:

$$p^2 \mid 11^{p^2} + 1$$

Προτεινόμενη Λύση

Αρχικά, παρατηρούμε εύκολα ότι ο πρώτος p δεν μπορεί να είναι ο αριθμός 11. Επομένως, από το μικρό θεώρημα του Fermat (το είδαμε στο πρόβλημα [OLY2017-A14](#)), έχουμε $11^{p^2-1} = (11^{p+1})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ή ισοδύναμα $11^{p^2} \equiv 11 \pmod{p}$ ή ισοδύναμα $11^{p^2} + 1 \equiv 12 \pmod{p}$.

Έτσι, αν ο p διαιρεί τον 11^{p^2+1} , τότε έχουμε $p \mid 12$. Μένει, τώρα, να ελέγξουμε τις περιπτώσεις όπου $p = 2$ και $p = 3$.

- Αν $p = 2$, τότε:

$$11^4 = (11^2)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{4} \Leftrightarrow 11^4 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

Επομένως, η περίπτωση $p = 2$ απορρίπτεται.

- Αν $p = 3$, τότε:

$$11^9 \equiv 2^9 \equiv 8 \pmod{9} \Leftrightarrow 11^9 + 1 \equiv 0 \pmod{9}$$

Επομένως, η περίπτωση $p = 3$ είναι δεκτή.

Έχουμε, τελικά, ότι ο μοναδικός πρώτος αριθμός που ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος είναι ο $p = 3$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εξής:

Πόρισμα Fermat

Αν p πρώτος αριθμός και a ακέραιος αριθμός, τότε:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Απόδειξη

- Αν $p \nmid a$, τότε $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ή ισοδύναμα $a^p \equiv a \pmod{p}$.
- Αν $p \mid a$, τότε $a \equiv 0 \pmod{p}$ ή ισοδύναμα $a^p \equiv 0 \equiv a \pmod{p}$.

Τώρα, στο πρόβλημά μας, από το πόρισμα Fermat έχουμε $11^p \equiv 11 \pmod{p}$ ή ισοδύναμα:

$$(11^p)^p = 11^{p^2} \equiv 11^p \equiv 11 \pmod{p} \quad (1)$$

Επιπλέον:

$$p^2 \mid 11^{p^2} + 1 \Rightarrow p \mid 11^{p^2} + 1 \Rightarrow 11^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$12 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p \mid 12 \Rightarrow p = 2 \text{ ή } 3$$

Μένει τώρα να ελέγξουμε τις δύο τιμές, όπως κάναμε πιο πάνω.