



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A19
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

Πρόβλημα

Πάνω στις πλευρές AB, AC του τριγώνου $\triangle ABC$ παίρνουμε σημεία M, N τέτοια, ώστε $MN \parallel BC$. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών BN και CM ανήκει στη διάμεσο του τριγώνου $\triangle ABC$ που άγεται από την κορυφή A προς την πλευρά BC .

Προτεινόμενη Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:

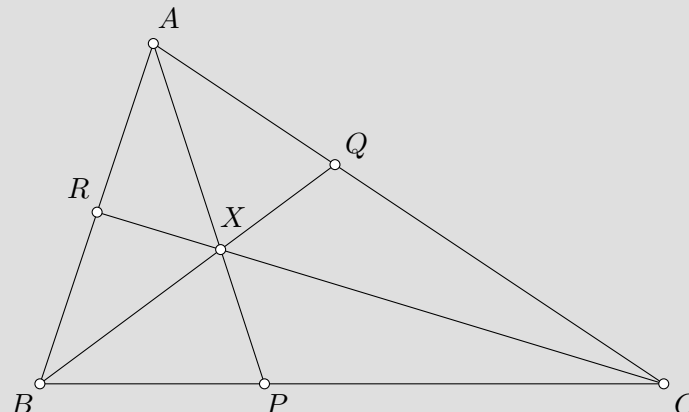
Θεώρημα Ceva

Πάνω στις πλευρές BC, CA, AB του τριγώνου $\triangle ABC$ παίρνουμε σημεία P, Q, R , αντίστοιχα. Τότε, τα πιο κάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Οι ευθείες AP, BQ, CR συντρέχουν.

$$(\beta) \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

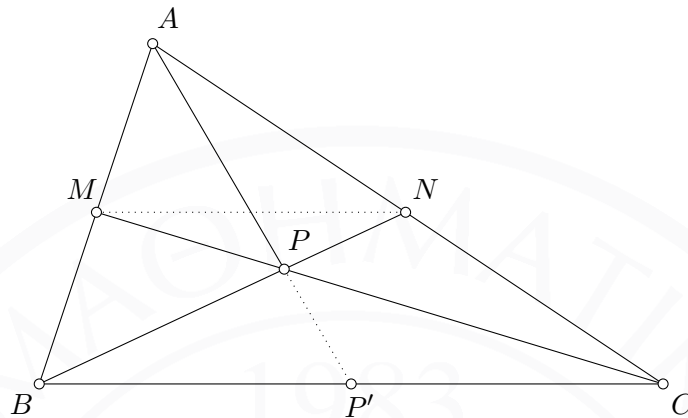
$$(\gamma) \frac{\eta\mu\angle PAC}{\eta\mu\angle BAP} \cdot \frac{\eta\mu\angle QBA}{\eta\mu\angle CBQ} \cdot \frac{\eta\mu\angle RCB}{\eta\mu\angle ACR} = 1 \quad (\text{Τριγωνομετρική Μορφή})$$



Στο πρόβλημά μας, αφού $MN \parallel BC$, τότε ισχύει:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad (1)$$

Έστω P το σημείο τομής των BN και CM . Έστω, επίσης, P' το σημείο τομής των AP και BC , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:



Αρκεί να δείξουμε ότι το P' είναι το μέσο της BC .

Από το Θεώρημα Ceva, αφού οι AP' , BN , CM συντρέχουν, έχουμε:

$$\frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{BP'}{P'C} = \frac{AN}{NC} \cdot \frac{MB}{AM} = 1$$

Επομένως, $BP' = P'C$ και τελειώσαμε.