



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A20

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να εξεταστεί αν υπάρχουν 2017 συνεχόμενοι αριθμοί ώστε ακριβώς 30 από αυτούς να είναι πρώτοι.

Προτεινόμενη Λύση

Γράφουμε A_n για το σύνολο $\{n+1, n+2, \dots, n+2017\}$. Το A_1 έχει περισσότερους από 30 πρώτους. Το σύνολο $A_{2018!+1}$ δεν έχει κανένα πρώτο αφού ο $2018!+1+k$ όπου $1 \leq k \leq 2017$ διαιρείται από τον $k+1$ και είναι μεγαλύτερος από αυτόν.

Ας γράψουμε a_n για το πλήθος των πρώτων του συνόλου A_n . Παρατηρούμε ότι τα a_{n+1} και a_n διαφέρουν το πολύ κατά 1. Αφού επίσης $a_1 > 30$ και $a_{2018!+1} = 0$, αναγκαστικά θα υπάρχει $1 < k < 2018!+1$ ώστε $a_k = 30$.

Σχόλιο

Η τεχνική που χρησιμοποιήσαμε ονομάζεται διακριτή συνέχεια.

Διακριτή συνέχεια

Αν έχουμε μια ακολουθία ακεραίων $a_1, a_2, \dots, a_n$ ώστε κάθε δύο συνεχόμενοι όροι να διαφέρουν το πολύ κατά 1, τότε η ακολουθία περιέχει όλους τους όρους μεταξύ των a_1 και a_n .

Συνήθως χρησιμοποιούμε την διακριτή συνέχεια όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε εμμέσως ένα σύνολο A με k στοιχεία και μια συγκεκριμένη ιδιότητα P . Αντί να το κάνουμε απευθείας, βρίσκουμε πρώτα ένα σύνολο B με $m < k$ στοιχεία, και ένα σύνολο C με $M > k$ στοιχεία, τα οποία να έχουν την ιδιότητα P . Ακολούθως δείχνουμε πως μπορούμε να «μετακινηθούμε» από το σύνολο B στο σύνολο C ώστε σε κάθε βήμα το σύνολο που έχουμε να έχει την ιδιότητα P και η διαφορά στον αριθμό των στοιχείων με το προηγούμενο σύνολο να είναι το πολύ 1.