



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A22

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω θετικοί ακέραιοι n, m με $n \geq m$. Συμβολίζουμε με (n, m) τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των n και m . Ναδειχθεί ότι ο αριθμός

$$\frac{(n, m)}{n} \binom{n}{m}$$

είναι ακέραιος.

Πηγή: Putnam 2000

Προτεινόμενη Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:

Λήμμα του Bezout

Αν d ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δυο ακεραίων m, n , τότε υπάρχουν ακέραιοι r, s τέτοιοι ώστε $d = rm + sn$.

Από το λήμμα, υπάρχουν ακέραιοι r, s τέτοιοι ώστε:

$$\frac{(n, m)}{n} \binom{n}{m} = \frac{rm + sn}{n} \binom{n}{m} = \frac{rm}{n} \binom{n}{m} + s \binom{n}{m} = r \binom{n-1}{m-1} + s \binom{n}{m}$$

Οπότε ο αριθμός είναι όντως ακέραιος.