



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A24

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθεί το πλήθος των υποσυνόλων του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ τα οποία δεν είναι υποσύνολα των $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $\{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Πηγή: ΗΠΑ 2017

Προτεινόμενη Λύση

Το σύνολο $\{1, 2, \dots, 8\}$ έχει $2^8 = 256$ υποσύνολα, αφού για κάθε στοιχείο του, μπορούμε να αποφασίσουμε με δύο τρόπους αν θα ανήκει στο υποσύνολο ή όχι. Από αυτά, πρέπει να αφαιρέσουμε τα $2^5 = 32$ υποσύνολα του $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, καθώς και τα 32 υποσύνολα του $\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Όμως τα κοινά υποσύνολα των $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ τα αφαιρέσαμε δύο φορές, οπότε πρέπει να τα προσθέσουμε πίσω. Κάθε κοινό υποσύνολο των $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ είναι υποσύνολο του $\{4, 5\}$. Οπότε υπάρχουν $2^2 = 4$ κοινά υποσύνολα.

Εν τέλει, το ζητούμενο πλήθος υποσυνόλων είναι:

$$256 - 32 - 32 + 4 = 196$$

Σχόλιο

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε ονομάζεται Αρχή του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού.

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (για δύο σύνολα)

Έστω σύνολα A, B . Τότε:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Εδώ, συμβολίζουμε με $|X|$ το πλήθος των στοιχείων του συνόλου X .

Στην πιο πάνω λύση χρησιμοποιήσαμε την αρχή παίρνοντας ως A το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ και ως B το σύνολο των υποσυνόλων του $\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Η αρχή

γενικεύεται και για περισσότερα από δύο σύνολα. Γράφουμε την περίπτωση για τρία σύνολα:

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (για τρία σύνολα)

Έστω σύνολα A, B, C . Τότε:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

