



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A26

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη πρώτων (p, q) τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση:

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2$$

Πηγή: Διαγωνισμός Βαλτικών Χωρών 2016

Προτεινόμενη Λύση

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $p, q \neq 3$. Τότε $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, και άρα $p^3 \equiv p \pmod{3}$. (Για τον συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε παραπέμπουμε στη λύση του [OLY2017-A02](#).)

Ομοίως λαμβάνουμε $q^5 \equiv q^3 \equiv q \pmod{3}$. Άρα:

$$p - q \equiv (p + q)^2 \pmod{3}$$

Αν $p \equiv q \pmod{3}$, τότε $p - q \equiv 0 \pmod{3}$, αλλά $(p + q)^2 \not\equiv 0 \pmod{3}$, άτοπο. Σε διαφορετική περίπτωση, πρέπει $p \equiv -q \pmod{3}$. Τότε όμως είναι $(p + q)^2 \equiv 0 \pmod{3}$, αλλά $p - q \not\equiv 0 \pmod{3}$, πάλι άτοπο.

Μένει λοιπόν να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $p = 3$ και $q = 3$.

Αν $p = 3$, τότε $q^5 < p^3 = 27$, άτοπο. Αν $q = 3$, τότε $p^3 - 243 = (p + 3)^2$. Ισοδύναμα, έχουμε:

$$252 = p^3 - p^2 - 6p = p(p^2 - p - 6)$$

Πρέπει λοιπόν $p \mid 252$. Όμως $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Άρα πρέπει $p = 2$ ή $p = 3$ ή $p = 7$. Ελέγχοντας διαδοχικά τις περιπτώσεις, παρατηρούμε ότι μόνο η $p = 7$ είναι αποδεκτή.

Άρα μοναδικό ζεύγος πρώτων που ικανοποιεί την εξίσωση είναι το $(p, q) = (7, 3)$.