



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A27
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

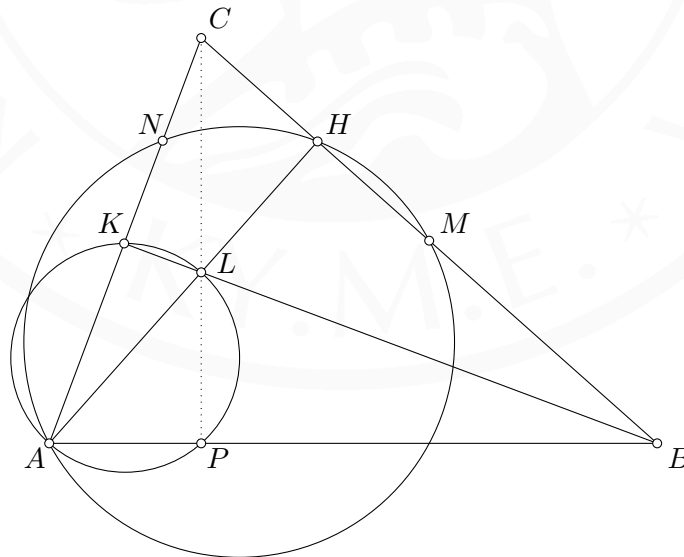
Πρόβλημα

Έστω $\triangle ABC$ ένα οξυγώνιο τρίγωνο με $AB \neq AC$ και έστω M το μέσο του BC . Ο κύκλος με διάμετρο AM τέμνει την AC στο σημείο N και την BC για δεύτερη φορά στο σημείο H . Παίρνουμε σημείο K στην AC , ανάμεσα στα σημεία A και N τέτοιο, ώστε $CN = NK$. Τα ευθύγραμμα τμήματα AH και BK τέμνονται στο σημείο L . Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A, K και L τέμνει την AB στο σημείο P . Να δείξετε ότι τα σημεία C, L και P είναι συνευθειακά.

Πηγή: Εθνική Ολυμπιάδα Κούβας, 2010

Προτεινόμενη Λύση

Η AM είναι η διάμετρος του κύκλου που τέμνει την BC στο σημείο H . Επομένως, έχουμε ότι $\angle AHM = 90^\circ$.



Από την δύναμη του σημείου C ως προς τον κύκλο με διάμετρο την AM (την οποία είδαμε στο πρόβλημα [OLY2017-A23](#)), έχουμε ότι:

$$CM \cdot CH = CN \cdot CA$$

Αφού το σημείο M είναι το μέσο του BC , έχουμε

$$\frac{BC \cdot CH}{2} = CN \cdot CA,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{BC}{CA} = \frac{2 \cdot CN}{CH} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow CB \cdot CH = CK \cdot CA$$

Από την τελευταία ισότητα έπεται ότι το τετράπλευρο $AKHB$ είναι κυκλικό. Αφού $\angle AHM = 90^\circ$, τότε $\angle AKB = 90^\circ$. Έτσι, το σημείο L είναι το ορθόκεντρο του $\triangle ABC$. Μένει να δείξουμε ότι $\angle APL = 90^\circ$, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του ότι το τετράπλευρο $AKLP$ είναι κυκλικό.

Σχόλιο

Ένας άλλος τρόπος να αποδείξουμε ότι το σημείο L είναι το ορθόκεντρο του $\triangle ABC$ είναι ο ακόλουθος:

Αφού

$$\frac{BM}{MC} = \frac{KN}{NC} = 1,$$

έχουμε ότι $BK \parallel MN$. Η AM είναι διάμετρος. Έτσι, $\angle ANM = 90^\circ$ και $\angle AKB = 90^\circ$. Επομένως, το BK είναι ύψος του $\triangle ABC$.