



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A28

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Αν m θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε ως $f(m)$ τον μεγαλύτερο περιττό διαιρέτη του m . Π.χ. $f(7) = 7$, $f(10) = 5$ και $f(16) = 1$. Αν n θετικός ακέραιος, να δειχθεί ότι:

$$f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2n) = n^2$$

Πηγή: Τουρνουά Πόλεων 2003

Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι κάθε ένα από τα $f(n+1), f(n+2), \dots, f(2n)$ πρέπει να ανήκει στο σύνολο $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$.

Για κάθε m , ο $\frac{m}{f(m)}$ δεν μπορεί να έχει περιττό διαιρέτη. Δηλαδή ο $\frac{m}{f(m)}$ πρέπει να είναι δύναμη του 2. Αν λοιπόν $f(k) = f(m)$ για κάποια k, m με $k < m$, τότε ο m/k είναι δύναμη του 2. Επομένως θα ισχύει και ότι $m \geq 2k$.

Άρα τα $f(n+1), \dots, f(2n)$ είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, και άρα ισούνται, με κάποια σειρά, με τα $1, 3, \dots, 2n-1$. Οπότε:

$$\begin{aligned} f(n+1) + \cdots + f(2n) &= 1 + 3 + \cdots + (2n-1) \\ &= \frac{1}{2}[(1 + (2n-1)) + (3 + (2n-3)) + \cdots + ((2n-1) + 1)] \\ &= n^2 \end{aligned}$$