



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A29

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται θετικοί ρητοί αριθμοί a, b, c ώστε $a + b + c = 1$. Ναδειχθεί ότι:

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \leq \frac{1}{3}$$

Πηγή: Αυστρία 2008

Προτεινόμενη Λύση

Οι $1 - a = b + c$, $1 - b = c + a$ και $1 - c = a + b$ είναι θετικοί ρητοί αριθμοί. Έστω N το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών τους. Οπότε οι $r = N(1 - a)$, $s = N(1 - b)$, $t = N(1 - c)$ είναι θετικοί ακέραιοι. Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ (δείτε τα σχόλια στην λύση του προβλήματος [OLY2017-A21](#)) έχουμε:

$$ra + sb + tc = \underbrace{a + \dots + a}_r + \underbrace{b + \dots + b}_s + \underbrace{c + \dots + c}_t \geq (r + s + t)^{\frac{r+s+t}{r+s+t}} \sqrt[r+s+t]{a^r b^s c^t}$$

Επειδή $r + s + t = N((1 - a) + (1 - b) + (1 - c)) = 2N$, τότε:

$$[a(1 - a) + b(1 - b) + c(1 - c)] \geq 2a^{\frac{r}{2N}} b^{\frac{s}{2N}} c^{\frac{t}{2N}} = 2N \sqrt{a^{1-a} b^{1-b} c^{1-c}}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι:

$$a(1 - a) + b(1 - b) + c(1 - c) \leq \frac{2}{3}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz (δείτε τα σχόλια στην λύση του προβλήματος [OLY2017-A01](#)) έχουμε:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = 1$$

Άρα:

$$a(1 - a) + b(1 - b) + c(1 - c) = (a + b + c) - (a^2 + b^2 + c^2) \leq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

όπως θέλαμε να δείξουμε.

Σχόλια:

Η παράσταση $\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}}$ μας υποφίαζε ότι έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα AM-ΓΜ. Χρειαστήκαμε όμως κάποια προεργασία διότι οι $1-a, 1-b, 1-c$ δεν ήταν ακέραιοι. Η ίδια προεργασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξει την ακόλουθη γενίκευση της AM-ΓΜ στην περίπτωση όπου τα r_i είναι ρητοί.

Ανισότητα AM-ΓΜ με βάρη

Έστω θετικός ακέραιος n , και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $r_1, \dots, r_n$ και $x_1, \dots, x_n$.

Έστω $r = r_1 + \dots + r_n$. Τότε:

$$\frac{r_1 x_1 + \dots + r_n x_n}{r} \geq \sqrt[r]{x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = \dots = x_n$.

Θα μπορούσαμε για πιο σύντομη λύση να επικαλεστούμε την συγκεκριμένη ανισότητα αφού τότε θέτοντας $x_1 = a, r_1 = 1-a$ κ.τ.λ., και χρησιμοποιώντας ότι $r = 2$, θα περνάμε απευθείας:

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \leq \frac{a(1-a) + b(1-b) + c(1-c)}{2}$$