



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A31
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

Πρόβλημα

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, σημείο Σ στη διαγώνιο ΑΓ και το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ. Η ευθεία ΣΜ τέμνει την ευθεία ΓΔ στο σημείο Ν. Αν η ΝΟ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι $ΣΕ \perp ΒΓ$.

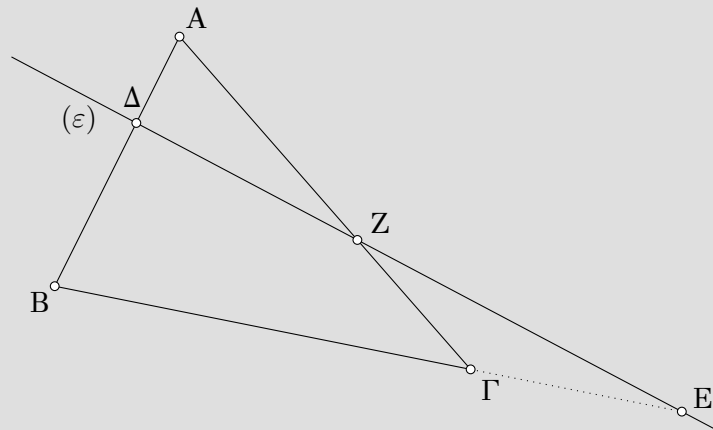
Προτεινόμενη Λύση

Θα παρουσιάσουμε πρώτα το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα Μενελάου

Αν μια ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία Δ, Ε, Ζ, αντίστοιχα, τότε:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{EB}{EG} \cdot \frac{ZG}{ZA} = 1$$

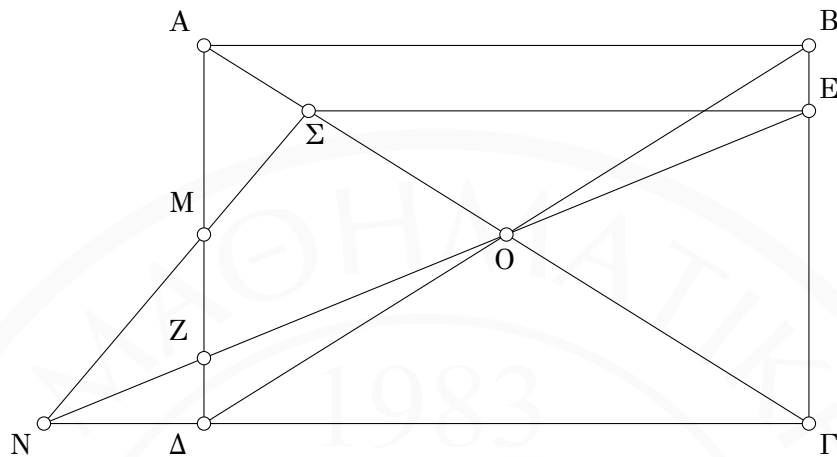


Αντίστροφα, αν ισχύει η πιο πάνω σχέση και το ένα τουλάχιστον από τα σημεία Δ, Ε, Ζ βρίσκεται πάνω στην προέκταση μιας πλευράς, τότε τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

Στο πρόβλημά μας τώρα, στο τρίγωνο $\triangle A\Delta\Gamma$ με τέμνουσα τη ΣMN , το θεώρημα Με-
νελάου δίνει:

$$\frac{M\Delta}{MA} \cdot \frac{\Sigma A}{\Sigma\Gamma} \cdot \frac{N\Gamma}{N\Delta} = 1 \Leftrightarrow \frac{\Sigma A}{\Sigma\Gamma} = \frac{N\Delta}{N\Gamma} \quad (1)$$

αφού $M\Delta = MA$.



Τώρα, αφού $\triangle N\Delta Z \sim \triangle N\Gamma E$, τότε:

$$\frac{N\Delta}{N\Gamma} = \frac{Z\Delta}{E\Gamma} = \frac{BE}{E\Gamma} \quad (2)$$

αφού $Z\Delta = BE$.

Επομένως, από τις (1) και (2), έπεται ότι

$$\frac{\Sigma A}{\Sigma\Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma},$$

που σημαίνει ότι στο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι $\Sigma E \parallel AB$. Άρα, $\Sigma E \perp B\Gamma$.