



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A33

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω a, b, c οι τρεις ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 4x + 1$. Να υπολογιστεί το:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$$

Προτεινόμενη Λύση 1

Αφού οι a, b, c είναι οι ρίζες του $P(x)$, τότε οι $a+1, b+1, c+1$ είναι οι ρίζες του

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x-1) = 2(x-1)^3 - 8(x-1)^2 + 4(x-1) + 1 \\ &= 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 8(x^2 - 2x + 1) + 4(x-1) + 1 \\ &= 2x^3 - 14x^2 + 26x - 13 \end{aligned}$$

Αφού οι $a+1, b+1, c+1$ είναι ρίζες του $Q(x)$, και καμία δεν ισούται με 0, τότε οι $\frac{1}{1+a}, \frac{1}{1+b}, \frac{1}{1+c}$ είναι οι ρίζες του

$$R(x) = x^3 Q\left(\frac{1}{x}\right) = 2 - 14x + 26x^2 - 13x^3 = -13x^3 + 26x^2 - 14x + 2$$

Θέλουμε το άθροισμα των ριζών του $R(x)$. Από Vieta (δείτε στα σχόλια) το άθροισμα ισούται με $-\frac{26}{(-13)} = 2$.

Προτεινόμενη Λύση 2

Η παράσταση ισούται με:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} &= \frac{(1+b)(1+c) + (1+c)(1+a) + (1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ &= \frac{3 + 2(a+b+c) + (ab+bc+ca)}{1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc} \end{aligned}$$

Από Vieta έχουμε

$$a+b+c = 4, \quad ab+bc+ca = 2, \quad \text{και} \quad abc = -\frac{1}{2}$$

Άρα:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{3+2 \cdot 4+2}{1+2+4-\frac{1}{2}} = 2$$

Σχόλια

Γνωρίζουμε ότι αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, (όπου $a \neq 0$) τότε

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad \text{και} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Για να το αποδείξουμε αυτό, χρησιμοποιούμε ότι το πολυώνυμο παραγοντοποιείται ως

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

και εξισώνουμε συντελεστές στην πιο πάνω ισότητα. Π.χ. ο συντελεστής του x στο αριστερό μέλος ισούται με b και στο δεξί μέλος ισούται με $-a(x_1 + x_2)$. Οπότε έχουμε $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Με την ίδια τακτική, αν x_1, x_2, x_3 είναι οι ρίζες της τριτοβάθμιας εξίσωσης $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, (όπου $a \neq 0$) μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a}, \quad \text{και} \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

Παρόμοιοι τύποι ισχύουν και για πολυώνυμα οποιουδήποτε βαθμού. Πριν γράψουμε τους τύπους χρειαζόμαστε έναν επιπλέον ορισμό. Αν έχουμε μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$, τότε το k -οστό στοιχειώδες συμμετρικό άθροισμα αυτών των μεταβλητών ορίζεται ως το άθροισμα όλων των δυνατών γινομένων που μπορούμε να πάρουμε αν πολλαπλασιάσουμε k διαφορετικές από τις μεταβλητές. Συμβολίζουμε το k -οστό στοιχειώδες συμμετρικό άθροισμα των $x_1, \dots, x_n$ με s_k ή με $s_k(x_1, \dots, x_n)$. Π.χ.

$$s_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad s_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \quad s_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

Τύποι Vieta (Διακεκριμένες πραγματικές ρίζες)

Έστω πολυώνυμο $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$. Αν $x_1, \dots, x_n$ είναι n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες του $f(x)$ τότε

$$s_k(x_1, \dots, x_n) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Π.χ. αν γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x - 1$ έχει τέσσερις πραγματικές διακεκριμένες ρίζες x_1, x_2, x_3, x_4 , τότε

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = s_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1)^2 \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}$$

Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας (δείτε τα σχόλια στην λύση του [OLY2017-B27](#))

λέει ότι κάθε πραγματικό πολυώνυμο βαθμού n , έχει με πολλαπλότητα n μιγαδικές ρίζες. Με την πολλαπλότητα της ρίζας α εννοούμε πόσες φορές εμφανίζεται το $x - \alpha$ στην παραγοντοποίηση του $f(x)$. Οι τύποι του Vieta ισχύουν και σε αυτήν την περίπτωση.

Τύποι Vieta (Γενική περίπτωση)

Έστω πολυώνυμο $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ και έστω $x_1, \dots, x_n$ οι ρίζες του $f(x)$ με την κατάλληλη πολλαπλότητα. Τότε

$$s_k(x_1, \dots, x_n) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

