



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B03

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω θετικός ακέραιος n , και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ και $b_1, \dots, b_n$. Να αποδειχθεί η ανισότητα:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \max \left\{ \frac{b_1}{1}, \frac{b_1 + b_2}{2}, \dots, \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \right\}$$

Πηγή: Κορέα 2016

Προτεινόμενη Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε μια τεχνική η οποία ονομάζεται **άθροιση κατά μέρη**. Ορίζουμε $B_k = b_1 + \dots + b_k$ για $1 \leq k \leq n$ και $B_0 = 0$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &= a_1(B_1 - B_0) + a_2(B_2 - B_1) + \dots + a_n(B_n - B_{n-1}) \\ &= (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n \end{aligned}$$

Αν λοιπόν

$$M = \max \left\{ \frac{b_1}{1}, \frac{b_1 + b_2}{2}, \dots, \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \right\},$$

τότε

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &\leq M(a_1 - a_2) + 2M(a_2 - a_3) + \dots + nMa_n \\ &= M[a_1 + (2-1)a_2 + \dots + (n - (n-1))a_n] \\ &= M(a_1 + a_2 + \dots + a_n), \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

Σχόλιο: Με την άθροιση κατά μέρη μπορούμε να δείξουμε τα εξής:

Τύποι άθροισης του Abel

Έστω πραγματικοί αριθμοί $a_1, \dots, a_n$ και $b_1, \dots, b_n$. Θέτουμε επίσης $a_0 = a_{n+1} = 0$. Τότε

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \sum_{r=1}^k b_r$$

και

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \sum_{r=k}^n b_r$$

