



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B04

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται διακεκριμένα σημεία A, B, C τα οποία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με αυτήν την σειρά. Έστω κύκλος (K) ο οποίος περνά από τα A, C και δεν έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία AC . Έστω P το σημείο τομής των εφαπτομένων του (K) στα A και C και έστω Q σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος PB με τον κύκλο (K) .

Ναδειχθεί ότι το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας $\angle AQC$ με το ευθύγραμμο τμήμα AC είναι ανεξάρτητο του κύκλου (K) .

Πηγή: IMO Shortlist 2003

Προτεινόμενη Λύση

Θα αποδείξουμε και θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:

Συμμετροδιάμεσος (Ορισμός + Βασικό Λήμμα)

Έστω τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (K) και έστω D το σημείο τομής των εφαπτομένων του (K) στα B και C . Τότε η ευθεία AD είναι η συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ABC που περνά από το σημείο A . Δηλαδή, είναι η συμμετρική ευθεία της διαμέσου του τριγώνου ABC η οποία περνά από το A , ως προς την διχοτόμο της $\angle BAC$.

Για την απόδειξη, ας υποθέσουμε ότι η συμμετρική της AD ως προς την διχοτόμο της $\angle BAC$, τέμνει την BC στο M' όπως στο σχήμα. Αρκεί να δείξουμε ότι το M' είναι το μέσο της BC .

Έχουμε

$$\frac{BM'}{AM'} = \frac{\sin(\angle BAM')}{\sin(\angle ABC)} = \frac{\sin(\angle DAC)}{\sin(\angle ACD)} = \frac{DC}{AD},$$

όπου στην πρώτη και τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον Νόμο των Ημιτόνων και στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του M' και το Θεώρημα Χορδής-

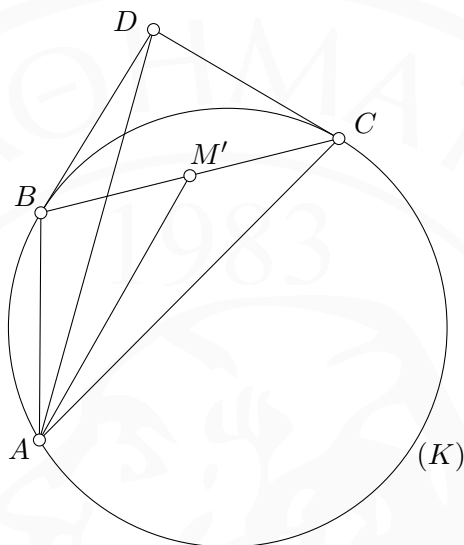
Εφαπτομένης. Ομοίως έχουμε

$$\frac{CM'}{AM'} = \frac{DB}{AD},$$

και άρα

$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{DC}{DB} = 1,$$

αφού οι DB, DC είναι εφαπτομένες του κύκλου (K) από το σημείο D . Οπότε όντως το M' είναι το μέσο της BC .

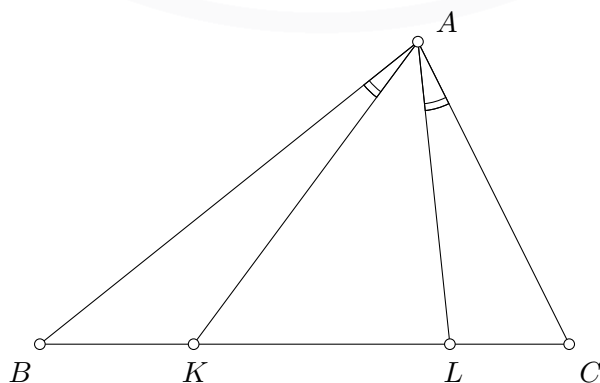


Θα αποδείξουμε και θα χρησιμοποιήσουμε επίσης και το εξής:

Ισογώνιες ευθείες (Ορισμός + Βασικό Λήμμα)

Έστω τρίγωνο ABC και δύο σημεία K, L πάνω στην BC τέτοια ώστε οι ευθείες AK, AL είναι ισογώνιες, δηλαδή συμμετρικές ως προς την διχοτόμο της $\angle BAC$. Τότε

$$\frac{BK}{CK} \frac{BL}{CL} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2$$



Για την απόδειξη, από τον ορισμό των K και L , έχουμε $\angle BAK = \angle LAC$ και $\angle BAL = \angle KAC$. Οπότε από τον Νόμο των Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{BK}{CL} = \frac{BK}{\sin(\angle BAK)} \frac{\sin(\angle LAC)}{LC} = \frac{AB}{\sin(\angle BKA)} \frac{\sin(\angle ALC)}{AC}$$

και

$$\frac{BL}{CK} = \frac{BL}{\sin(\angle BAL)} \frac{\sin(\angle KAC)}{CK} = \frac{AB}{\sin(\angle ALB)} \frac{\sin(\angle AKC)}{AC}$$

Το λήμμα έπεται πολλαπλασιάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις.

Πίσω στο πρόβλημά μας τώρα. Η QB είναι συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ACQ . Αν λοιπόν M το μέσο της AC τότε οι ευθείες QM και QB είναι ισογώνιες οπότε:

$$\left(\frac{AQ}{CQ}\right)^2 = \frac{AB}{BC} \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$$

Επίσης, αν R το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας $\angle AQC$ με το ευθύγραμμο τμήμα AC , τότε από το Θεώρημα των Διχοτόμων έχουμε:

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AR}{CR}$$

Συνεπώς

$$\frac{AR}{CR} = \frac{AQ}{CQ} = \sqrt{\frac{AB}{BC}},$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο του κύκλου (K) . Άρα και το σημείο R είναι ανεξάρτητο του κύκλου (K) .

