



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B06

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Γράφουμε στα κελιά ενός $n \times n$ πίνακα τους αριθμούς $1, 2, \dots, n^2$ με κάποια σειρά. Να δειχθεί ότι υπάρχουν δυο αριθμοί σε γειτονικά κελιά οι οποίοι διαφέρουν τουλάχιστον κατά n .

Προτεινόμενη Λύση

Έστω k ελάχιστο ώστε να υπάρχει σειρά ή στήλη στην οποία ο μέγιστος αριθμός είναι ο k .

Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η πρώτη σειρά έχει ως μέγιστο αριθμό τον k . Ας υποθέσουμε ότι το k βρίσκεται στην πρώτη στήλη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε στήλη, από την δεύτερη και μετά, περιέχει έναν αριθμό μικρότερο του k , (αυτόν στην πρώτη σειρά) και έναν μεγαλύτερο του k . (Αν δεν είχε αριθμό μεγαλύτερο του k τότε σε αυτήν την στήλη όλοι οι αριθμοί θα ήταν μικρότεροι του k , άτοπο από τον ορισμό του k .)

Αφού κάθε στήλη c_i για $2 \leq i \leq n$ έχει έναν αριθμό μεγαλύτερο του k και έναν μικρότερο του k , τότε θα έχει και δυο γειτονικούς αριθμούς ώστε ο ένας να είναι μεγαλύτερος του k και ο άλλος μικρότερος του k . Ας ονομάσουμε m_i τον μικρότερο και M_i τον μεγαλύτερο. Ο μεγαλύτερος από τους $M_2, \dots, M_n$, έστω ο M_2 , πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον $k + (n - 1)$. Αλλά ισχύει ότι $m_2 \leq n - 1$. Οπότε είναι $M_2 - m_2 \geq n$ και εφόσον οι m_2, M_2 είναι γειτονικοί το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Σχόλιο:

Σε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιήσαμε μια σημαντική τεχνική η οποία ονομάζεται αρχή ακροτάτου (extremal principle). Η τεχνική αυτή βασίζεται στην επιλογή ενός αριθμού ο οποίος είναι ο μέγιστος ή ο ελάχιστος που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Προσέξτε π.χ. πόσο πολύ απλοποιήθηκε το συγκεκριμένο πρόβλημα με τον τρόπο που επιλέξαμε το k . Συνήθως σε τέτοια προβλήματα η βασική δυσκολία είναι στον τρόπο που θα επιλέξουμε αυτόν τον μέγιστο ή ελάχιστο αριθμό. Μερικές φορές δεν είναι καν προφανές ότι μπορεί να εφαρμόζεται αυτή η τεχνική σε κάποιο πρόβλημα γι' αυτό και πρέπει να είμαστε συχνά υποφιασμένοι και να την δοκιμάζουμε.