



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B08

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC και μεταβλητό σημείο X πάνω στο ελάχιστον τόξο BC του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC . Έστω P και Q τα ίχνη των καθετών από το X στις ευθείες CA και CB αντίστοιχα. Έστω R το σημείο τομής της PQ και της κάθετης από το B στο AC . Έστω ℓ η ευθεία που περνάει από το P και είναι παράλληλη προς την XR . Ναδειχθεί ότι υπάρχει σημείο F , το οποίο καθορίζεται μόνο από το τρίγωνο ABC , έτσι ώστε ανεξάρτητα από το που βρίσκεται το σημείο X πάνω στο ελάχιστον τόξο BC , η ευθεία ℓ περνάει από το F .

Πηγή: ΗΠΑ 2014

Προτεινόμενη Λύση

Θα αποδείξουμε και θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:

Ευθεία Simson (Ορισμός + Βασική Ιδιότητα)

Έστω τρίγωνο ABC και έστω σημείο P πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC . Τότε τα ίχνη των καθετών από το P πάνω στις ευθείες AB , BC και AC είναι συνευθειακά. Η ευθεία που ορίζουν τα ίχνη ονομάζεται ευθεία Simson του σημείου P ως προς το τρίγωνο ABC .

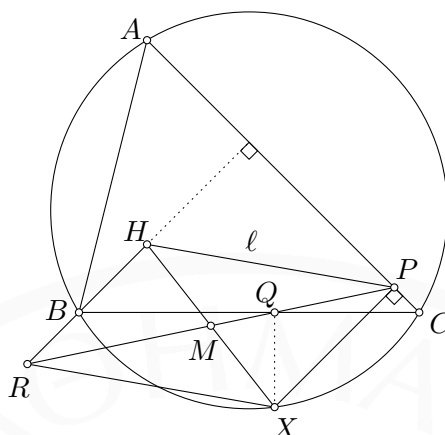
Αν επιπλέον το H είναι το ορθόκентρο του τριγώνου ABC , τότε η ευθεία Simson διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα PH .

Προτού αποδείξουμε το πιο πάνω ας δούμε πως μπορεί να εφαρμοστεί στο πρόβλημα.

Έστω H το ορθόκентρο του τριγώνου ABC . Θα δείξουμε ότι το $PHRX$ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως, το H ανήκει πάνω στην ℓ και είναι το ζητούμενο σημείο F .

Η ευθεία PQR είναι η ευθεία Simson του σημείου X ως προς το τρίγωνο ABC . Οι RH και PX είναι κάθετες πάνω στην AC , συνεπώς είναι παράλληλες. Αν M το μέσο της HX , τότε από την βασική ιδιότητα της ευθείας Simson, το M ανήκει πάνω στην ευθεία

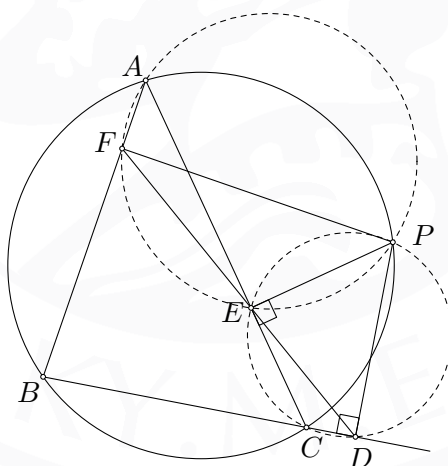
Simson. Δηλαδή η PR διχοτομεί την HX και άρα το $PHRX$ είναι όντως παραλληλόγραμμο όπως θέλαμε να δείξουμε.



Ας περάσουμε τώρα στην απόδειξη της ύπαρξης της ευθείας Simson. Γράφουμε D, E, F για τα ίχνη των καθέτων από το P στα BC, AC, AB αντίστοιχα. Εφόσον $\angle PEC = \angle PDC = 90^\circ$, τα σημεία P, E, C, D είναι ομοκυκλικά. Ομοίως, τα A, P, E, F είναι επίσης ομοκυκλικά. Οπότε:

$$\angle PED = \angle PCD = 180^\circ - \angle PCB = \angle PAB = \angle PAF = 180^\circ - \angle PEF$$

Άρα τα D, E, F είναι όντως συνευθειακά.

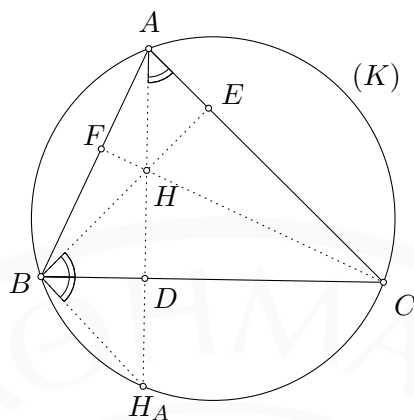


Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της βασικής ιδιότητας της ευθείας Simson, απομονώνουμε ένα ακόμη απλό και βασικό λήμμα το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε:

Συμμετρικά ορθοκέντρου

Έστω τρίγωνο ABC και έστω (K) ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABC . Τότε τα συμμετρικά του ορθοκέντρου του τριγώνου ABC ως προς τις πλευρές του ανήκουν στον (K) .

Για την απόδειξη, ας γράψουμε D, E, F για τα ίχνη των υψών όπως στο πιο κάτω σχήμα. Ας γράψουμε επίσης H για το ορθόκεντρο, και H_A για το σημείο τομής της AH με τον κύκλο (K) . Αρκεί να δείξουμε ότι $HD = DA$.

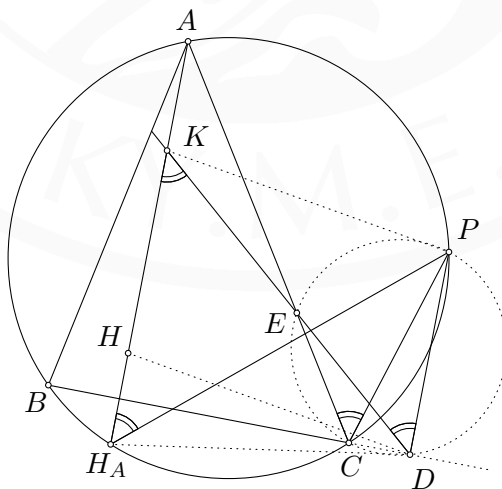


Έχουμε διαδοχικά:

$$\angle H_A BC = \angle H_A AC = \angle DAC = \angle CBE$$

Οπότε η BC είναι διχοτόμος της $\angle H_A BH$, άρα και διάμεσος. Συνεπώς, το ζητούμενο έπεται.

Ας περάσουμε τώρα στην απόδειξη της βασικής ιδιότητας της ευθείας Simson. Έστω D, E τα ίχνη των καθέτων από την P στα BC, AC αντίστοιχα. Έστω επίσης K το σημείο τομής της ευθείας Simson με την AH . Αρκεί να δείξουμε ότι $HK = PD$. Πράγματι, αφού οι HK, PD είναι κάθετες στην BC , τότε είναι και παράλληλες, και άρα το $HKPD$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται που δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα.



Έστω H_A το συμμετρικό του ορθοκέντρου H ως προς την BC . Γνωρίζουμε ότι το H_A ανήκει πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του ABC . Γνωρίζουμε επίσης πως τα

P, E, C, D είναι ομοκυκλικά. Επομένως έχουμε:

$$\angle PH_A K = \angle PH_A A = \angle PCA = \angle PCE = \angle PDE = \angle DKH_A$$

Άρα το τραπέζιο $KPDH_A$ είναι ισοσκελές. Από τον ορισμό του H_A έχουμε επίσης $DH = DH_A$ οπότε το $DPKH$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $HK = PD$ όπως θέλαμε να δείξουμε.

