



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B10

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω θετικοί ακέραιοι n, k και ένα σύνολο S από n σημεία στο επίπεδο έτσι ώστε τα σημεία του S να είναι ανά τρία μη συνευθειακά και επιπλέον, για κάθε σημείο P του S να υπάρχουν τουλάχιστον k σημεία του S τα οποία ισαπέχουν από το P .

Ναδειχθεί ότι $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Πηγή: IMO 1989

Προτεινόμενη Λύση

Θεωρούμε όλα τα ζεύγη $(P, \{Q, R\})$ όπου τα P, Q, R είναι διαφορετικά σημεία του S ώστε $PQ = PR$. Έστω ότι έχουμε N τέτοια ζεύγη.

Επειδή για κάθε σημείο P του S μπορώ να βρω τουλάχιστον k σημεία του S τα οποία να ισαπέχουν από το P , τότε $N \geq n \binom{k}{2}$.

Έστω τώρα δύο διαφορετικά σημεία Q, R του S . Κάθε σημείο P για το οποίο ισχύει ότι $PQ = PR$ βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο της QR . Αφού το S δεν έχει τρία συνευθειακά σημεία, τότε το S έχει το πολύ 2 σημεία P ώστε $PQ = PR$. Άρα $N \leq 2 \binom{n}{2}$.

Άρα $n \binom{k}{2} \leq 2 \binom{n}{2}$ το οποίο δίνει $k^2 - k - 2(n - 1) \leq 0$. Άρα:

$$k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8(n - 1)}}{2} < \frac{1 + \sqrt{8n}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

Σχόλιο

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε ονομάζεται διπλή απαρίθμηση. Μετρήσαμε τα ζεύγη με δύο διαφορετικούς τρόπους βρίσκοντας ένα άνω φράγμα και ένα κάτω φράγμα για το πλήθος τους.

Συνήθως η διπλή απαρίθμηση χρησιμοποιείται ως εξής: Θέλουμε να μετρήσουμε όλα τα ζεύγη (x, y) τα οποία ικανοποιούν μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Μετράμε αρχικά από

«αριστερά». Αν έχουμε n επιλογές για τα x και για κάθε επιλογή του x έχουμε το πολύ m επιλογές για τα y , τότε υπάρχουν το πολύ mn ζεύγη. Αν για κάθε επιλογή του x έχουμε τουλάχιστον m επιλογές για τα y , τότε υπάρχουν τουλάχιστον mn ζεύγη. Ακολούθως μετράμε από «δεξιά». Η επιλογή του κατάλληλου συνόλου ζευγών που πρέπει να απαριθμηθεί έχει τεράστια σημασία. Π.χ. στο πιο πάνω πρόβλημα αν θεωρούσαμε όλα τα ζεύγη (P, Q) για τα οποία υπάρχει κάποιο R ώστε $PQ = PR$, τότε ενώ από αριστερά θα βρίσκαμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον nk ζεύγη, από δεξιά δεν φαίνεται να μπορούμε να βρούμε εύκολα κάποιο φράγμα αισθητά καλύτερο του $n(n-1)$.

