



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B11

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b, c . Ναδειχθεί ότι:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

Πηγή: ΗΠΑ 2003

Προτεινόμενη Λύση

Επειδή η ανισότητα είναι ομοιογενής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a+b+c=1$. Η ζητούμενη ανισότητα γίνεται

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq 8$$

όπου:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2} = \frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1}$$

Αρκεί, για θετικό πραγματικό x , να δείξουμε ότι:

$$f(x) \leq \frac{12x+4}{3}$$

Πράγματι τότε θα έχουμε

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{12(a+b+c)+12}{3} = 8$$

που είναι και η ζητούμενη ανισότητα.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) \leq \frac{12x+4}{3} &\iff 3(x^2+2x+1) \leq (12x+4)(3x^2-2x+1) \\ &\iff 3x^2+6x+3 \leq 36x^3-12x^2+4x+4 \\ &\iff 36x^3-15x^2-2x+1 \geq 0 \\ &\iff (3x-1)^2(4x+1) \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα όντως $f(x) \leq \frac{12x+4}{3}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Σχόλιο

Πως σκεφτήκαμε να αποδείξουμε την ανισότητα $f(x) \leq \frac{12x+4}{3}$; Η αρχική σκέψη είναι ότι η ισότητα λαμβάνεται στα $a = b = c = 1/3$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι κοίλη στο $[0, 1]$ αφού τότε από την ανισότητα Jensen θα έχουμε:

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 8$$

Σε αυτήν την περίπτωση όμως η $f(x)$ δεν είναι κοίλη. Πράγματι μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι:

$$f'(x) = -\frac{4(2x^2 + x - 1)}{(3x^2 - 2x + 1)^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{12(4x^3 + 3x^2 - 6x + 1)}{(3x^2 - 2x + 1)^3}$$

Εύκολα τώρα βλέπουμε ότι $f''(0) = 12 > 0$ οπότε η f όντως δεν είναι κοίλη.

Η βασική ιδιότητα των κυρτών (αντίστοιχα κοίλων) συναρτήσεων, η οποία επιτρέπει την απόδειξη της ανισότητας Jensen, είναι ότι σε κάθε σημείο μιας κυρτής συνάρτησης, η εφαπτομένη σε αυτό το σημείο βρίσκεται πλήρως κάτω (αντίστοιχα πάνω) από την συνάρτηση.

Αντί λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Jensen απευθείας, θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $x = 1/3$ που μας ενδιαφέρει, βρίσκεται πάνω από την $f(x)$.

Επειδή $f'(1/3) = 4$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x)$ στο $x = 1/3$ είναι η:

$$y = 4\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{8}{3} = \frac{12x + 4}{3}$$

Αρκεί τώρα να ελέγξουμε ότι $f(x) \leq \frac{12x+4}{3}$ το οποίο και κάναμε στην προτεινόμενη απόδειξη πιο πάνω. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση

$$\frac{12x + 4}{3} - f(x)$$

έχει διπλή ρίζα στο $x = 1/3$ λόγω του ότι η $y = (12x + 4)/3$ είναι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο $x = 1/3$. Οπότε ξέρουμε εκ των προτέρων ότι στις πράξεις που θα κάνουμε θα εμφανιστεί το $(3x - 1)^2$.

Η πιο πάνω αρκετά χρήσιμη ιδέα ονομάζεται μέθοδος της εφαπτομένης και χρησιμεύει σε κάποιες περιπτώσεις όπου δεν μπορεί να βοηθήσει η ανισότητα Jensen. Παρόλο που χρησιμοποιούμε παραγώγους η τελική απόδειξη μπορεί να γραφεί χωρίς καμία αναφορά σε διαφορικό λογισμό.