



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B12

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται σημείο D στο εσωτερικό τριγώνου ABC . Έστω A_1, B_1, C_1 τα σημεία τομής (πέραν του D) των ευθειών AD, BD και CD με τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων BDC, CDA και ADB αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι:

$$\frac{AD}{AA_1} + \frac{BD}{BB_1} + \frac{CD}{CC_1} = 1$$

Πηγή: Bay Area 2008

Προτεινόμενη Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε αντιστροφή.

Αντιστροφή ως προς κύκλο (Ορισμός)

Έστω κύκλος (K) κέντρου O και ακτίνας R . Η αντιστροφή ως προς τον (K) στέλνει κάθε σημείο P διάφορο του O στο μοναδικό σημείο P' το οποίο ανήκει στην ημιευθεία που ξεκινά από το O και περνά από το P , και το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση $(OP)(OP') = R^2$.

Προσθέτουμε επίσης στο επίπεδο ένα ειδικό σημείο το οποίο δηλώνουμε «σημείο στο άπειρο» και το συμβολίζουμε με P_∞ . Θεωρούμε ότι όλες οι ευθείες του επιπέδου περνούν από αυτό το σημείο. Η αντιστροφή στον κύκλο (K) στέλνει το O στο P_∞ και αντιστρόφως.

Παρατηρούμε ότι η αντιστροφή στέλνει όλα τα σημεία που βρίσκονται μέσα στον κύκλο έξω από αυτόν και αντίστροφα. Επίσης διατηρεί σταθερά όλα τα σημεία του κύκλου. Τέλος, αν εφαρμόσουμε την αντιστροφή δύο φορές κάθε σημείο θα επιστρέψει στον εαυτό του.

Η αντιστροφή ικανοποιεί τις εξής βασικές ιδιότητες:

Αντιστροφή ως προς κύκλο (Βασικές Ιδιότητες)

- (1) Αν P σημείο μέσα στον κύκλο (C) διάφορο του O και AB η χορδή του (K) η οποία είναι κάθετη στην OP , τότε οι AP' και BP' είναι οι εφαπτομένες από το P' στον κύκλο (K) .
- (2) Αν A, B σημεία του επιπέδου διάφορα του O τότε:

$$A'B' = \frac{R^2(AB)}{(OA)(OB)}$$

- (3) Αν A, B διακεκριμένα σημεία διάφορα του O τότε $\angle OAB = \angle OB'A'$
- (4) Η αντιστροφή στέλνει γενικευμένους κύκλους που περνούν από το O σε ευθείες. [Θεωρούμε κάθε κύκλο και κάθε ευθεία ως γενικευμένο κύκλο.]
- (5) Η αντιστροφή στέλνει γενικευμένους κύκλους που δεν περνούν από το O σε κύκλους.
- (6) Η αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες που σχηματίζουν οι γενικευμένοι κύκλοι αναλλοίωτες. [Ορίζουμε ως γωνία δύο γενικευμένων κύκλων την γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες τους στο σημείο τομής τους.]

Πάμε τώρα πίσω στο πρόβλημα. Εφαρμόζουμε αντιστροφή σε κύκλο ακτίνας $R = 1$ με κέντρο το D .

Το σημείο C_1 ανήκει στον κύκλο ADB ο οποίος με την αντιστροφή πάει στην ευθεία $A'B'$. Άρα το C'_1 ανήκει στην $''$. Ομοίως το A'_1 ανήκει στην $B'C'$ και το B'_1 στην $A'C'$. Έχουμε:

$$AA_1 = \frac{A'A'_1}{(DA')(DA'_1)} = \frac{(A'A'_1)(DA)}{DA'_1}$$

Άρα:

$$\frac{AD}{AA_1} = \frac{A'_1D}{A'A'_1}$$

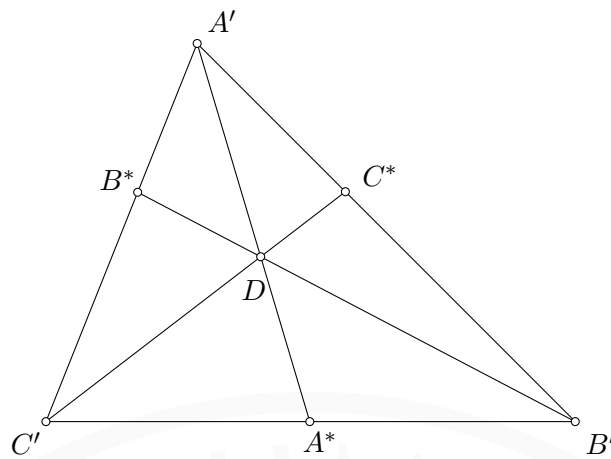
Ομοίως έχουμε

$$\frac{BD}{BB_1} = \frac{B'_1D}{B'B'_1} \quad \text{και} \quad \frac{CD}{CC_1} = \frac{C'_1D}{C'C'_1}$$

οπότε μένει να δείξουμε ότι:

$$\frac{A'_1D}{A'A'_1} + \frac{B'_1D}{B'B'_1} + \frac{C'_1D}{C'C'_1} = 1 \quad (*)$$

Η ευθεία $A'A'_1$ είναι εικόνα του γενικευμένου κύκλου που περνάει από τα A, A_1 και D . Αυτός ο γενικευμένος κύκλος είναι ευθεία. Άρα περνάει από το P_∞ και άρα η εικόνα του περνάει από το D . Δηλαδή τα A', A'_1 και D είναι συνευθειακά. Ομοίως τα B', B'_1, D είναι συνευθειακά καθώς και τα C', C'_1, D . Δηλαδή οι $A'A'_1, B'B'_1, C'C'_1$ συντρέχουν στο D .



Τότε όμως έχουμε

$$\frac{A'_1 D}{A' A'_1} = \frac{E_{DB'C'}}{E_{A'B'C'}}, \quad \frac{B'_1 D}{B' B'_1} = \frac{E_{DA'C'}}{E_{A'B'C'}} \quad \text{και} \quad \frac{C'_1 D}{C' C'_1} = \frac{E_{DA'B'}}{E_{A'B'C'}}$$

από τα οποία η (*) προκύπτει άμεσα.