



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B13

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά c ώστε για κάθε πρώτο p να ισχύει το εξής: Το πλήθος των θετικών ακεραίων n για τους οποίους $p|n! + 1$ είναι το πολύ $cp^{2/3}$.

Πηγή: Κίνα 2009

Προτεινόμενη Λύση

Έστω φυσικοί n, k ώστε $p|n! + 1$ και $p|(n+k)! + 1$. Τότε το

$$(n+k)! - n! = n![(n+1) \cdots (n+k) - 1]$$

είναι πολλαπλάσιο του p . Αφού επιπλέον $p \nmid n!$, τότε $p|[(n+1) \cdots (n+k) - 1]$.

Για σταθερό k , η εξίσωση

$$(n+1) \cdots (n+k) \equiv 1 \pmod{p}$$

έχει το πολύ k διαφορετικές λύσεις modulo p . (Αυτό είναι συνέπεια της Ευκλείδειας Διαίρεσης πολυωνύμων modulo p την οποία είδαμε στο πρόβλημα [OLY2017-B07](#).)

Έστω ότι υπάρχουν N θετικοί ακέραιοι n για τους οποίους $p|n! + 1$. Για κάποιο k που θα επιλέξουμε αργότερα, θα μετρήσουμε όλα τα ζεύγη (m, n) ώστε $p|m! + 1, p|n! + 1$ και $0 < n - m \leq k$. Έστω M το συγκεκριμένο πλήθος. Από τα πιο πάνω είναι:

$$M \leq 1 + 2 + \cdots + k \leq k^2$$

(Επειδή μας ενδιαφέρει μόνο η ύπαρξη της σταθεράς c , για ευκολία στις πράξεις, χρησιμοποιήσαμε το k^2 αντί του $k(k+1)/2$.)

Διαμερίζουμε τώρα το σύνολο $\{1, 2, \dots, p-1\}$ στα διαστήματα:

$$\{1, 2, \dots, k\}, \{k+1, \dots, 2k\}, \dots$$

(Το τελευταίο διάστημα επιτρέπεται να έχει λιγότερα από k στοιχεία.)

Έχουμε $r = \lceil (p-1)/k \rceil$ τέτοια διαστήματα. Για ευκολία στις πράξεις θα χρησιμοποιή-

σουμε αργότερα την ανισότητα $r \leq 2p/k$ η οποία ισχύει για $k \leq p$. Έστω $a_1, \dots, a_r$ το πλήθος των θετικών ακεραίων n για τους οποίους $p|n! + 1$ και οι οποίοι βρίσκονται σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$M \geq \binom{a_1}{2} + \dots + \binom{a_r}{2}$$

(Το M μπορεί να είναι μεγαλύτερο αφού επιτρέπεται να πάρουμε και ζεύγη λύσεων από γειτονικά διαστήματα.) Από την ανισότητα Jensen παίρνουμε:

$$M \geq r \binom{(a_1 + \dots + a_r)/r}{2} = r \binom{N/r}{2} \geq \frac{(N-r)^2}{2r}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο

$$\frac{(N-r)^2}{2r} \leq k^2$$

ή ισοδύναμα:

$$N \leq r + k\sqrt{2r} \leq \frac{2p}{k} + 2\sqrt{pk}$$

Επιλέγοντας $k = p^{1/3}$ παίρνουμε $N \leq 4p^{2/3}$ οπότε το ζητούμενο αποδείχθηκε.