



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B15

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω ακολουθίες $(a_n), (b_n)$ ώστε $a_1 = 1, b_1 = 2$ και

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$$

για $n \geq 1$.

Να δειχθεί ότι $a_{2017} < 5$.

Πηγή: Ρωσία 2008

Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$a_{n+1} + 1 = \frac{(1 + a_n)(1 + b_n)}{b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} + 1 = \frac{(1 + a_n)(1 + b_n)}{a_n}$$

Ορίζουμε $c_n = a_n + 1$ και $d_n = b_n + 1$. Οπότε έχουμε:

$$c_{n+1} = \frac{c_n d_n}{d_n - 1} \quad \text{και} \quad d_{n+1} = \frac{c_n d_n}{c_n - 1}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\frac{1}{c_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}} = \frac{(d_n - 1) - (c_n - 1)}{c_n d_n} = \frac{d_n - c_n}{c_n d_n} = \frac{1}{c_n} - \frac{1}{d_n}$$

Επαγωγικά παίρνουμε:

$$\frac{1}{c_n} - \frac{1}{d_n} = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{d_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

για κάθε φυσικό n . Οπότε είναι $c_n < 6$ και άρα $a_n < 5$ για κάθε φυσικό n . Άρα έχουμε και $a_{2017} < 5$.