



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B16

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

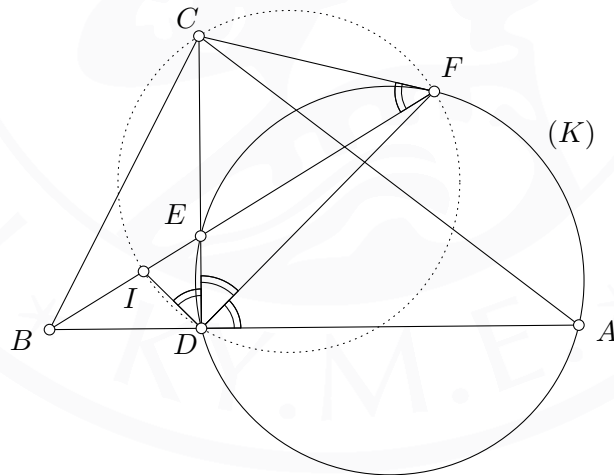
Πρόβλημα

Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC και έστω D το ίχνος του ύψους από το C . Η διχοτόμος της $\angle ABC$ τέμνει την CD στο σημείο E και τον περιγεγραμμένο κύκλο (K) του τριγώνου ADE ξανά στο σημείο F .

Αν $\angle ADF = 45^\circ$ ναδειχθεί ότι η CF είναι εφαπτομένη του κύκλου (K) στο σημείο F .

Πηγή: EGMO 2015

Προτεινόμενη Λύση



Αφού $\angle ADF = 45^\circ$, η DF είναι εξωτερική διχοτόμος της $\angle BDC$. Επειδή επίσης η BF είναι διχοτόμος της $\angle CBD$ τότε το F είναι παράκεντρο του $\triangle BCD$. Έστω I το έγκεντρο του $\triangle BCD$. Τότε το I ανήκει πάνω στην BF και τα C, I, D, F είναι ομοκυκλικά.

Έχουμε:

$$\angle CFI = \angle CDI = 45^\circ = \angle EDF$$

Άρα από το Θεώρημα Χορδής-Εφαπτομένης η CF είναι εφαπτομένη του κύκλου (K) στο σημείο F .

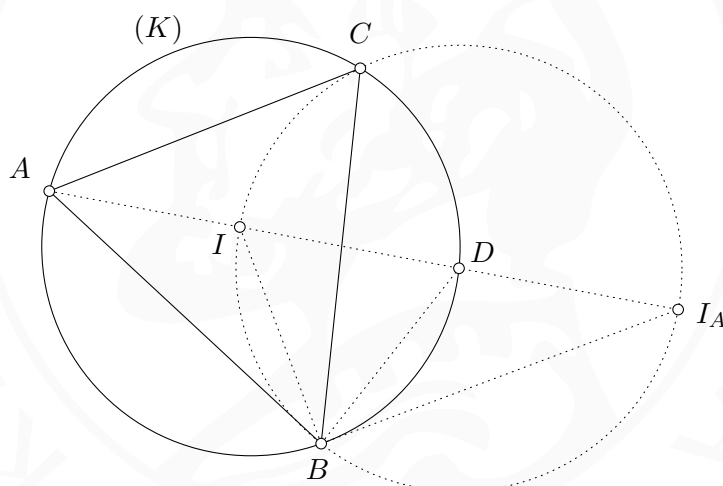
Σχόλιο: Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το εξής:

Παράκεντρα (Ορισμός + Βασική Ιδιότητα)

Έστω τρίγωνο ABC . Τότε οι εξωτερικές διχοτόμοι των $\angle ABC$ και $\angle BCA$ μαζί με την εσωτερική διχοτόμο της $\angle CAB$ συντρέχουν σε ένα σημείο το οποίο ονομάζεται παράκεντρο του τριγώνου ABC .

Ο περιγεγραμμένος κύκλος (K_A) του τριγώνου BCI_A περνάει από το έγκεντρο I του τριγώνου ABC . Η II_A είναι διάμετρος του K_A . Επιπλέον το κέντρο του (K_A) ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο (K) του τριγώνου ABC .

Για την απόδειξη των πιο πάνω ξεκινάμε από το τρίγωνο ABC με έγκεντρο I και περιγεγραμμένο κύκλο (K) . Έστω επίσης D το άλλο σημείο τομής της AI με τον (K) και έστω I_A σημείο στην προέκταση της AI από την πλευρά του I ώστε $ID = DI_A$.



Θα δείξουμε πρώτα ότι $BD = DI$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\angle IBD = \angle BID$. Ας συμβολίσουμε με α, β, γ τις αντίστοιχες γωνίες του τριγώνου ABC . Έχουμε

$$\angle IBD = \angle IBC + \angle CBD = \frac{\beta}{2} + \angle CAD = \frac{\beta + \alpha}{2},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι οι BI και AI είναι διχοτόμοι και ότι τα A, B, D, C είναι ομοκυκλικά. Επίσης:

$$\angle BID = \angle IAB + \angle IBA = \frac{\beta + \alpha}{2} = \angle IBD$$

Από συμμετρία έχουμε επίσης ότι $CD = DI$. Άρα είναι $DI_A = DI = DB = DC$ και τα B, C, I_A, I ανήκουν στον ίδιο κύκλο με κέντρο το D και διάμετρο II_A .

Μένει τώρα να δείξουμε ότι η BI_A είναι εξωτερική διχοτόμος της ABC αφού τότε από συμμετρία η CI_A θα είναι εξωτερική διχοτόμος της ACB .

Αφού η II_A είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του $\triangle IBI_A$, έχουμε:

$$\angle CBI_A = \angle IBI_A - \angle IBC = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \frac{180 - \beta}{2}$$

Άρα όντως η BI_A είναι εξωτερική διχοτόμος της ABC .

