



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ  
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B18

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

**Πρόβλημα** Ξεκινάμε με τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Σε κάθε βήμα μπορούμε να πάρουμε ένα από τα τρίγωνα που υπάρχουν, να φέρουμε το ύψος από την ορθή γωνία, και να το κόψουμε από αυτό το ύψος δημιουργώντας δύο νέα τρίγωνα.

Να δειχθεί ότι σε κάθε βήμα υπάρχουν τουλάχιστον δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα.

Πηγή: Μόσχα 1995

**Προτεινόμενη Λύση**

Ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών  $a, b, c$ , όπου  $c$  η υποτείνουσα, κόβεται σε δύο ορθογώνια τρίγωνα όμοια με το αρχικό, όπου οι λόγοι των πλευρών των καινούργιων τριγώνων προς τις πλευρές του αρχικού είναι  $a/c$  και  $b/c$  αντίστοιχα.

Επομένως κάθε τρίγωνο που δημιουργείται είναι όμοιο με τα αρχικά, με λόγο πλευρών ως προς τα αρχικά ίσο με  $(a/c)^m(b/c)^n$  για κάποιους φυσικούς  $m, n$ . Αντιστοιχούμε αυτό το τρίγωνο στο ζεύγος  $(m, n)$ .

Το πρόβλημα τώρα μεταφράζεται ως εξής: Ξεκινάμε με τέσσερα πιόνια που βρίσκονται στο σημείο  $(0, 0)$ . Σε κάθε βήμα μπορούμε να πάρουμε ένα πιόνι που βρίσκεται στο σημείο  $(m, n)$ , να το αφαιρέσουμε και να προσθέσουμε δυο καινούργια πιόνια, ένα στο σημείο  $(m+1, n)$ , και ένα στο σημείο  $(m, n+1)$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι σε κάθε βήμα υπάρχει ένα σημείο με τουλάχιστον δύο πιόνια.

Αν ένα πιόνι βρίσκεται στο σημείο  $(m, n)$ , του δίνουμε βάρος  $2^{-(m+n)}$ . Με αυτήν την επιλογή του βάρους, παρατηρούμε ότι σε κάθε κίνηση το συνολικό βάρος των πιονιών παραμένει το ίδιο. Το αρχικό βάρος είναι 4 οπότε το ίδιο ισχύει και για το τελικό βάρος.

Σίγουρα όμως το τελικό βάρος είναι αυστηρά μικρότερο από το συνολικό βάρος που θα είχαμε αν είχαμε από ένα πιόνι σε κάθε σημείο με συντεταγμένες φυσικούς αριθμούς. Το βάρος είναι όντως αυστηρά μικρότερο επειδή σε κανένα βήμα δεν θα έχουμε άπειρο αριθμό πιονιών.

Το άθροισμα των βαρών όλων των σημείων με συντεταγμένες  $(0, n)$  όπου  $n$  φυσικός

είναι:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

Αυτών με συντεταγμένες  $(1, n)$  είναι 1, αυτών με συντεταγμένες  $(2, n)$  είναι  $1/2$ , κ.ο.κ. Οπότε το συνολικό άθροισμα βαρών είναι:

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots = 4$$

Εδώ καταλήγουμε σε άτοπο αφού από την μία το συνολικό βάρος των πιονιών ισούται με 4, ενώ από την άλλη, αφού δεν μπορούμε να έχουμε άπειρα πιόνια, το συνολικό βάρος είναι μικρότερο του 4. Οπότε πρέπει πάντα να έχουμε τουλάχιστον δύο πιόνια στο ίδιο σημείο.

