



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B19

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα Έστω ακολουθία (a_n) ώστε $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 3$ και $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ για κάθε ακέραιο $n \geq 1$.

Να δειχθεί ότι $p|a_p$ για κάθε πρώτο p .

Πηγή: Mathematical Gazette 1981

Προτεινόμενη Λύση

Έστω a, b, c οι τρεις ρίζες του πολωνύμου $x^3 - x - 1$. Ορίζουμε:

$$S_n = a^n + b^n + c^n$$

Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι $a_n = S_n$. Αν ορίσουμε $a_0 = 3$, τότε η συνθήκη $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ ισχύει και για $n = 0$. Έχουμε:

$$S_0 = 3 = a_0 \quad \text{και} \quad S_1 = a + b + c = 0 = a_1$$

Επίσης:

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 0 - 2(-1) = 2 = a_2$$

Για το επαγωγικό βήμα παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= a_{n+1} + a_n \\ &= S_{n+1} + S_n \\ &= (a^{n+1} + a^n) + (b^{n+1} + b^n) + (c^{n+1} + c^n) \\ &= a^{n+3} + b^{n+3} + c^{n+3} \\ &= S_{n+3} \end{aligned}$$

Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι τα a, b, c είναι ρίζες του $x^3 - x - 1$ και άρα ικανοποιούν την εξίσωση $x^{n+3} = x^{n+1} + x^n$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την εξής γενίκευση του διωνυμικού θεωρήματος:

Πολυωνυμικό Θεώρημα

Έστω θετικοί ακέραιοι r, n και πραγματικοί αριθμοί $x_1, \dots, x_r$. Τότε:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_r = n} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

όπου:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$$

Στο άθροισμα λαμβάνουμε υπόψη όλες τις r -άδες $(k_1, \dots, k_r)$ μη αρνητικών ακεραίων με $k_1 + \dots + k_r = n$.

Π.χ. ο συντελεστής του $x^3 y z w^2$ στο ανάπτυγμα του $(x + y + z + w)^7$ ισούται με:

$$\binom{7}{3, 1, 1, 2} = \frac{7!}{3!2!} = 420$$

Για p πρώτο, και k_1, k_2, k_3 μη αρνητικούς ακεραίους με $k_1 + k_2 + k_3 = p$, παρατηρούμε ότι ο πολυωνυμικός συντελεστής

$$\frac{p}{k_1, k_2, k_3} = \frac{p!}{k_1! k_2! k_3!}$$

είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του p εκτός και αν κάποιος από τα k_i ισούται με p . Πράγματι σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις ο αριθμητής είναι πολλαπλάσιο του p ενώ ο παρονομαστής όχι.

Άρα από το πολυωνυμικό θεώρημα έχουμε ότι

$$0 = (a + b + c)^p = a^p + b^p + c^p + pQ(a, b, c)$$

όπου το $Q(a, b, c)$ είναι ένα συμμετρικό πολυώνυμο στα a, b, c με ακέραιους συντελεστές.

Μπορούμε τώρα να επικαλεστούμε το ακόλουθο:

Θεμελιώδες Θεώρημα Συμμετρικών Πολυωνύμων

Έστω μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$. Ένα πολυώνυμο $P(x_1, \dots, x_n)$ ονομάζεται συμμετρικό στα $x_1, \dots, x_n$ αν:

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(y_1, \dots, y_n)$$

για κάθε μετάθεση $y_1, \dots, y_n$ των $x_1, \dots, x_n$.

Π.χ. το πολυώνυμο $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1 x_2 x_3$ είναι συμμετρικό ενώ το πολυώνυμο $x_1 + x_2^2 + x_3^3$ όχι.

Τα πολυώνυμα:

$$\begin{aligned}e_0 &= e_0(x_1, \dots, x_n) = 1 \\e_1 &= e_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n \\e_2 &= e_2(x_1, \dots, x_n) = x_1x_2 + \dots + x_1x_n + \dots + x_{n-1}x_n \\&\vdots \\e_n &= e_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n\end{aligned}$$

ονομάζονται στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα στα $x_1, \dots, x_n$.

Το θεμελιώδες θεώρημα των συμμετρικών πολυωνύμων λέει ότι κάθε συμμετρικό πολυώνυμο Q μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως πολυώνυμο P με μεταβλητές τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα. Επιπλέον, αν το Q έχει ακέραιους συντελεστές, τότε το ίδιο ισχύει και για το P .

Π.χ. ισχύει ότι:

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 = 3e_2e_1 + e_1^2 - 2e_2$$

Από το πιο πάνω έχουμε ότι το $Q(a, b, c)$ μπορεί να γραφτεί ως πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και μεταβλητές τα $a+b+c$, $ab+bc+ca$ και abc . Όμως τα $a+b+c$, $ab+bc+ca$ και abc είναι ακέραιοι, οπότε και ο $Q(a, b, c)$ είναι ακέραιος. Άρα το

$$a_p = S_p = a^p + b^p + c^p = -pQ(a, b, c)$$

είναι πολλαπλάσιο του p .

Σχόλιο

Δεν βρήκαμε τυχαία ότι $a_n = S_n$ αλλά χρησιμοποιήσαμε συγκεκριμένα το πιο κάτω:

Επίλυση αναδρομικών σχέσεων (Περίπτωση διακεκριμένων ριζών)

Αν έχουμε μια αναδρομική σχέση της μορφής

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0$$

για κάθε φυσικό n , και το πολυώνυμο

$$x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$$

έχει ρίζες $x_1, \dots, x_k$ οι οποίες είναι διαφορετικές ανά δύο, τότε υπάρχουν $A_1, \dots, A_k$ ώστε

$$x_n = A_1x_1^n + \dots + A_kx_k^n$$

για κάθε φυσικό n . Τα $A_1, \dots, A_k$ μπορούν να υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες που συνήθως είναι οι τιμές των $x_1, \dots, x_k$.