



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B21

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα Ναδειχθεί ότι αν η διαφορά δυο συνεχόμενων κύβων ισούται με n^2 , όπου n φυσικός, τότε ο $2n - 1$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Πηγή: An Introduction to Diophantine Equations, Πρόβλημα 3.3.8

Προτεινόμενη Λύση

Έστω ότι $(m + 1)^3 - m^3 = n^2$. Τότε:

$$n^2 = 3m^2 + 3m + 1 = 3\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

Άρα:

$$(2n)^2 - 3(2m + 1)^2 = 1$$

Δηλαδή οι $x = 2n, y = 2m + 1$ είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 3y^2 = 1$. Αυτή είναι εξίσωση Pell (δείτε στα σχόλια για την σχετική θεωρία) με θεμελιώδη λύση $x_1 = 2, y_1 = 1$. Άρα οι λύσεις (x_k, y_k) της εξίσωσης ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$x_k = 4x_{k-1} - x_{k-2}$$

για $k \geq 2$, όπου $x_0 = 1, x_1 = 2$.

Πρέπει $x_k = 2n$ άρτιος. Είναι απλό επαγωγικά από την πιο πάνω αναδρομική σχέση ότι πρέπει ο k να είναι περιττός. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο $x_{2k+1} - 1$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέτουμε:

$$z_k = \frac{(1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^k + (1 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^k}{2}$$

Ο z_k είναι ακέραιος αφού $z_0 = 1, z_1 = 5$ και η ακολουθία (z_k) ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $z_k = 4z_{k-1} - z_{k-2}$. (Αυτό είναι άμεσο επειδή τα $2 \pm \sqrt{3}$ είναι ρίζες του πολυωνύμου $x^2 - 4x + 1$.)

Επίσης:

$$z_k^2 = \frac{(4 + 2\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^k + (4 - 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^k - 4}{4} = x_{2k+1} - 1$$

Οπότε, το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Σχόλια

Για να βρούμε το z_k στην πιο πάνω λύση, δεν υπολογίσαμε απευθείας την τετραγωνική ρίζα του $x_{2k+1} - 1$, κάτι που είναι δύσκολο. Αντιθέτως, υποθέσαμε πως το z_k θα ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $z_k = 4z_{k-1} - z_{k-2}$. Αυτή η υπόθεση δείχνει να επιβεβαιώνεται και από τις αρχικές τιμές των $\sqrt{x_{2k+1} - 1}$. Αν ισχύει η υπόθεση, τότε από την θεωρία των αναδρομικών σχέσεων που είδαμε στο πρόβλημα [OLY2017-B17](#), θα πρέπει να ισχύει $z_k = A(2 + \sqrt{3})^k + B(2 - \sqrt{3})^k$. Χρησιμοποιώντας τα $z_0 = 1, z_1 = 5$, καταλήξαμε στον τύπο για το z_k που δώσαμε στην λύση. Ακολουθώντας, το μόνο που έμενε να ελέγξουμε είναι ότι όντως $z_k^2 = x_{2k+1} - 1$, κάτι που πλέον ήταν απλό.

Στην λύση χρησιμοποιήσαμε κάποια από τα πιο κάτω σχετικά με την εξίσωση Pell:

Εξίσωση Pell

Η διοφαντική εξίσωση $x^2 - Dy^2 = 1$, όπου D δεδομένος θετικός ακέραιος ελεύθερος τετραγώνου, ονομάζεται εξίσωση Pell. Η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις στους θετικούς ακεραίους. Η λύση (x_1, y_1) , όπου x_1 ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο υπάρχει λύση, ονομάζεται θεμελιώδης λύση. Οι υπόλοιπες θετικές λύσεις είναι της μορφής (x_n, y_n) όπου τα x_n, y_n μπορούν να υπολογιστούν με έναν από τους πιο κάτω τρόπους:

(1) Είναι οι μοναδικοί θετικοί ακέραιοι ώστε $x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$.

(2)

$$x_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{D})^n + (x_1 - y_1\sqrt{D})^n}{2} \quad \text{και} \quad y_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{D})^n - (x_1 - y_1\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}$$

(3) Ικανοποιούν τις αναδρομικές σχέσεις:

$$x_n = x_1x_{n-1} + Dy_1y_{n-1}$$

$$y_n = y_1x_{n-1} + x_1y_{n-1}$$

για $n \geq 2$.

(4) Ικανοποιούν τις αναδρομικές σχέσεις:

$$x_n = 2x_1x_{n-1} - x_{n-2}$$

$$y_n = 2x_1y_{n-1} - y_{n-2}$$

για $n \geq 2$, όπου $x_0 = 1, y_0 = 0$.