



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B23

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$f(xf(x) + f(x)f(y) + y - 1) = f(xf(x) + xy) + y - 1$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Πηγή: Κορέα 2014

Προτεινόμενη Λύση

Βάζοντας $x = 0$, παίρνουμε:

$$f(f(0)f(y) + y - 1) = f(0) + y - 1 \quad (1)$$

Αυτό μας δίνει ότι η f είναι επί. [Πράγματι, έστω $t \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $y = t + 1 - f(0)$, και $z = f(0)f(y) + y - 1$. Η (1) δίνει $f(z) = t$. Άρα η f είναι όντως επί.]

Υπάρχει λοιπόν $a \in \mathbb{R}$, ώστε $f(a) = 0$. Βάζοντας τώρα $x = a$ στην αρχική σχέση, παίρνουμε:

$$f(y - 1) = f(ay) + y - 1 \quad (2)$$

Τώρα βάζουμε $y = 1$ στην (2), για να πάρουμε:

$$f(0) = f(a) + 1 - 1 = f(a) = 0$$

Έπειτα βάζουμε $x = 0$ στην αρχική σχέση, για να πάρουμε:

$$f(y - 1) = y - 1 \quad (3)$$

Τέλος, βάζουμε $y = x + 1$ στην (3), για να πάρουμε $f(x) = x$ για κάθε x . Είναι απλό να ελεγχθεί ότι αυτή είναι λύση της συναρτησιακής εξίσωσης.

Σχόλια

Όταν προσπαθούμε να λύσουμε μια συναρτησιακή εξίσωση, υπάρχουν κάποιες τε-

χνικές που χρησιμοποιούνται συχνά και είναι καλό να τις έχουμε υπόψη ώστε να τις δοκιμάζουμε. Συνοψίζουμε τις τεχνικές που χρησιμοποιήσαμε εδώ. Υπάρχουν και άλλες, που θα δούμε σε μετέπειτα προβλήματα της εβδομάδας.

- (1) Δοκιμάζουμε συγκεκριμένες τιμές στις μεταβλητές (όπως $x = 0, y = 0$ κ.τ.λ.) οι οποίες είτε απλοποιούν την σχέση, είτε μας δίνουν κάποια επιπλέον πληροφορία.
- (2) Προσπαθούμε να δούμε αν η συνάρτηση είναι επί ή όχι. Μια συνηθισμένη μέθοδος για να δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι επί, είναι αυτή που χρησιμοποιήσαμε στην πρώτη παράγραφο της λύσης.
- (3) Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι επί, μπορούμε να ορίσουμε νέες σταθερές, στις οποίες η συνάρτηση παίρνει συγκεκριμένη τιμή. Π.χ. στην δεύτερη παράγραφο της λύσης, ορίσαμε την σταθερά a , για την οποία ίσχυε ότι $f(a) = 0$.
- (4) Επαναλαμβάνουμε συχνά κάποιες τεχνικές. Π.χ. από την στιγμή που γνωρίζουμε ότι $f(a) = 0$, επανήλθαμε θέτοντας $x = a$, και μετά $y = 1$.

Τονίζουμε επίσης δυο σημεία που είναι καλό να έχουμε υπόψη όταν γράφουμε την λύση μας σε μια συναρτησιακή εξίσωση.

- (1) Αριθμούμε τις σημαντικές σχέσεις που βρίσκουμε, και πάντα δηλώνουμε με ποια σχέση δουλεύουμε στο επόμενο βήμα. Αυτό κάνει τα βήματά μας πιο ξεκάθαρα και διευκολύνει τόσο τον διορθωτή στον έλεγχο της ορθότητας, όσο και εμάς στο να αποφύγουμε λανθασμένα βήματα.
- (2) Πάντα ελέγχουμε στο τέλος αν οι συναρτήσεις που βρήκαμε ικανοποιούν την αρχική εξίσωση. Αν δεν το κάνουμε, τότε θα χαθούν μονάδες.