



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B24

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

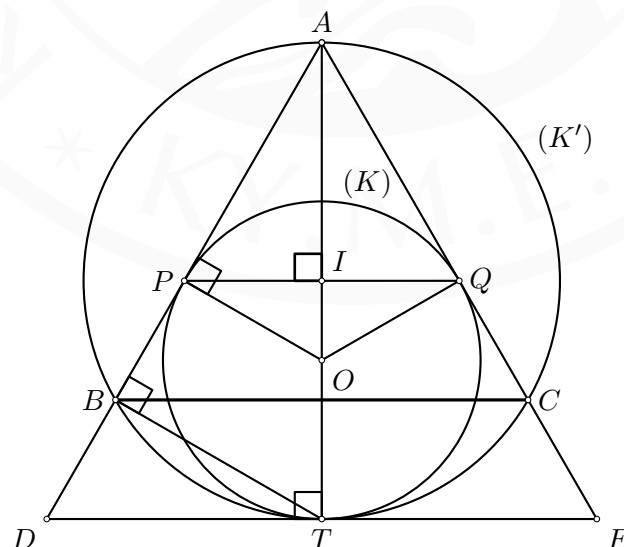
Πρόβλημα

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC , με $AB = AC$. Δίνεται επίσης κύκλος (K) , ο οποίος εφάπτεται εσωτερικά στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC . Ο (K) εφάπτεται επίσης στις πλευρές AB και AC του τριγώνου ABC , στα σημεία P και Q αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι το μέσο του PQ είναι το έγκεντρο του ABC .

Πηγή: IMO 1978

Προτεινόμενη Λύση

Γράφουμε I για το μέσο της PQ , (K') για τον περιγεγραμμένο κύκλο του ABC , O για το κέντρο του (K) , και T για το σημείο επαφής των (K) και (K') . Φέρνουμε την εφαπτομένη του (K) στο σημείο T . Έστω ότι τέμνει τις AB και AC στα D και E αντίστοιχα.



Οι γωνίες $\angle ATD$ και $\angle OPA$ είναι ορθές από τα δεδομένα της άσκησης.

Το σχήμα είναι συμμετρικό ως προς την διχοτόμο της $\angle BAC$. Άρα τα A, I, O, T είναι συνευθειακά, και το κέντρο του (K') ανήκει στην διχοτόμο. (Αν π.χ. οι (K) και (K') είχαν σημείο τομής στην μία πλευρά της διχοτόμου, τότε θεωρώντας την ανάκλαση ως προς την διχοτόμο, θα λαμβάναμε ότι θα είχαν σημείο τομής και στην άλλη πλευρά της διχοτόμου. Αυτό είναι άτοπο αφού δεν θα εφάπτονταν.) Επίσης, οι γωνίες $\angle TBA$ και $\angle AIP$ πρέπει να είναι και αυτές ορθές.

Θεωρούμε την ομοθεσία με κέντρο A και λόγο $\lambda = AI/AO$. (Δείτε τα σχόλια που ακολουθούν μετά την λύση.) Ο κύκλος (K) , με κέντρο το O , είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ADE . Έστω D' και E' οι εικόνες των D και E αντίστοιχα. Τότε η εικόνα του (K) , είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AD'E'$ και έχει κέντρο την εικόνα του O , δηλαδή το I . Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $D' = B$ και $E' = C$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι $AB/AD = AC/AE = \lambda$. Όμως:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AT} \frac{AT}{AD} = \frac{AP}{AO} \frac{AI}{IP} = \frac{AI}{AO} = \lambda$$

Εδώ, χρησιμοποιήσαμε τις ομοιότητες $\triangle APO \cong \triangle ABT$ και $\triangle AIP \cong \triangle ATD$ οι οποίες προκύπτουν εύκολα.

Ομοίως παίρνουμε $AC/AE = \lambda$, οπότε το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Σχόλια

Ομοθεσία (Ορισμός)

Δίνεται σημείο O στο επίπεδο και πραγματικός αριθμός $\lambda \neq 0$. Θεωρούμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό που αφήνει το O σταθερό, και στέλνει κάθε σημείο $A \neq O$, στο σημείο A' το οποίο ικανοποιεί $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OA}$. Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται ομοθεσία με κέντρο το A , και λόγο λ .

Αν βάλουμε συντεταγμένες ώστε το O να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, τότε η ομοθεσία στέλνει το σημείο (x, y) στο σημείο $(\lambda x, \lambda y)$. Με αυτήν την οπτική, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η ομοθεσία διατηρεί την ομοιότητα τριγώνων, διατηρεί τα σημαντικά σημεία των τριγώνων (π.χ. στέλνει το βαρύκεντρο ενός τριγώνου στο βαρύκεντρο της εικόνας του), στέλνει κύκλους σε κύκλους, κ.τ.λ.