



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B25

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να λυθεί στους θετικούς ακέραιους η εξίσωση:

$$3^x = 2^x y + 1$$

Πηγή: Ρουμανία 2005

Προτεινόμενη Λύση

Θα δείξουμε αρχικά με επαγωγή το ακόλουθο:

Λήμμα 1: Έστω θετικοί ακέραιοι n, m , ώστε $2^{n+2} | 3^m - 1$. Τότε $2^n | m$.

Απόδειξη: Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο n . Παρατηρούμε αρχικά ότι modulo 16, η ακολουθία 3^m είναι περιοδική με περίοδο 4, με το μοτίβο 3, 9, 11, 1 να επαναλαμβάνεται περιοδικά. Από εδώ παίρνουμε άμεσα τις περιπτώσεις $n = 1$ και $n = 2$ του ισχυρισμού.

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n = k$, και έστω ότι $2^{k+3} | 3^m - 1$. Τότε $16 | 3^m - 1$, οπότε από την περίπτωση $n = 2$ έχουμε ότι $4 | m$. Έστω $m = 4r$. Τότε:

$$3^m - 1 = 3^{4r} - 1 = (3^{2r} - 1)(3^{2r} + 1)$$

Έχουμε ότι $3^{2r} + 1 \equiv 2 \pmod{8}$. Αφού λοιπόν $2^{k+3} | 3^m - 1$ και $2^2 \nmid 3^{2r} + 1$, τότε $2^{k+2} | 3^{2r} - 1$. Από την επαγωγική υπόθεση, παίρνουμε $2^k | 2r$. Άρα $2^{k+1} | 4r$, δηλαδή $2^{k+1} | m$. Οπότε το επαγωγικό βήμα αποδείχθηκε, και άρα ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n .

Πίσω στο πρόβλημα τώρα. Έχουμε ότι $2^x | 3^x - 1$. Αν λοιπόν $x \geq 3$, το Λήμμα 1 δίνει ότι $2^{x-2} | x$. Για $x \geq 5$, είναι απλό ναδειχθεί επαγωγικά ότι $2^{x-2} > x$. Αυτό είναι άτοπο. Πρέπει λοιπόν $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ελέγχοντας αυτές τις τιμές μία προς μία, βρίσκουμε ότι τα μόνα ζεύγη λύσεων (x, y) είναι τα $(1, 1)$, $(2, 2)$ και $(4, 5)$.

Σχόλιο

Η κύρια δυσκολία του προβλήματος είναι να σκεφτούμε το Λήμμα 1. Από την στιγμή

που μας δοθεί, τόσο η απόδειξή του, όσο και η χρησιμοποίησή του, είναι σχετικά εύκολες.

Τέτοια λήμματα εμφανίζονται συχνά σε ασκήσεις αριθμοθεωρίας που έχουν άγνωστη μεταβλητή στον εκθέτη. Μάλιστα υπάρχει ένα λήμμα το οποίο ονομάζεται Lifting the Exponent Lemma το οποίο περιλαμβάνει το Λήμμα που αποδείξαμε ως ειδική περίπτωση και χρησιμεύει συχνά σε παρόμοιες περιπτώσεις. Πριν γράψουμε τι λεέι δίνουμε κάποια σχετική ορολογία.

Για έναν πρώτο p και έναν φυσικό n , θα γράφουμε $v_p(n)$ για την μέγιστη δύναμη του p που διαιρεί τον n . Π.χ. $v_2(20) = 2$, επειδή $2^2 | 20$, αλλά $2^3 \nmid 20$. Συχνά γράφουμε $p^k || n$ για να δηλώσουμε ότι $v_p(n) = k$. Π.χ. γράφουμε $2^2 || 20$.

Lifting the Exponent Lemma

Έστω πρώτος p , και φυσικοί a, b ώστε $a \equiv b \pmod{p}$. Έστω επίσης φυσικός n .

(1) Αν p περιττός, τότε:

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$$

(2) Αν $p = 2$, τότε:

$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a^2 - b^2) + v_2(n) - 1$$

Π.χ. στην περίπτωσή μας, αν πάρουμε $a = 3, b = 1, n = m$ και $p = 2$, τότε, αφού $3 \equiv 1 \pmod{2}$, το Lifting the Exponent Lemma δίνει:

$$v_2(3^m - 1) = v_2(8) + v_2(m) - 1 = v_2(m) + 2$$

Από εδώ το Λήμμα 1 έπεται άμεσα, αφού αν $2^{n+2} | 3^m - 1$, τότε $v_2(3^m - 1) \geq n + 2$, άρα $v_2(m) \geq n$, και άρα $2^n | m$.