



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B26

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Ένα κυρτό πολύεδρο έχει $7n$ έδρες. Ναδειχθεί ότι το πολύεδρο έχει τουλάχιστον $n + 1$ έδρες οι οποίες έχουν όλες τον ίδιο αριθμό ακμών.

Πηγή: Τουρνουά Harvard-MIT 2017

Προτεινόμενη Λύση

Γράφουμε V, E και F , για το πλήθος των κορυφών, ακμών, και εδρών του πολυγώνου αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι $F = 7n$.

Ας γράψουμε επίσης a_k , για το πλήθος των εδρών του πολυγώνου οι οποίες έχουν ακριβώς k ακμές. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $a_k \leq n$ για κάθε k . Μετρούμε τώρα τα ζεύγη (e, A) όπου η A είναι μια έδρα του πολυγώνου, και η e είναι μια ακμή της A . Αν η έδρα A έχει k ακμές, τότε ανήκει σε k ζεύγη. Άρα από τον ορισμό των a_k , συνολικά έχουμε $\sum k a_k$ ζεύγη. Κάθε ακμή όμως ανήκει σε δύο ζεύγη, οπότε συνολικά έχουμε $2E$ ζεύγη. Αφού $a_1 = a_2 = 0$, τότε:

$$\begin{aligned} 2E &= \sum k a_k \\ &\geq 9 \sum a_k - (a_8 + 2a_7 + \dots + 6a_3) \\ &\geq 63n - (1 + 2 + \dots + 6)n = 42n \end{aligned}$$

Από τον τύπο του Euler (δείτε τα σχόλια), έχουμε $V - E + F = 2$. Επειδή κάθε ακμή έχει δύο κορυφές, και κάθε κορυφή ανήκει σε τουλάχιστον τρεις ακμές, πρέπει $2E \geq 3V$. Άρα:

$$2 = V - E + F \leq F - \frac{E}{3} \leq 7n - \frac{42n}{6} = 0$$

Αυτό είναι άτοπο, οπότε το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Σχόλια

Ένα γράφημα ονομάζεται επίπεδο, αν μπορούμε να το σχεδιάσουμε στο επίπεδο με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην υπάρχουν δύο ακμές οι οποίες να τέμνονται εσωτερικά. Σε

έναν τέτοιο σχεδιασμό, το γράφημα χωρίζει το επίπεδο σε χωρία, τα οποία ονομάζονται έδρες. Ακριβώς ένα από τα χωρία θα είναι μη φραγμένο. Αυτό το χωρίο ονομάζεται η εξωτερική έδρα του επιπέδου γραφήματος.

Ο τύπος του Euler μας δίνει μια σχέση που διέπει τα πλήθη των κορυφών, ακμών, και εδρών ενός συνεκτικού, επιπέδου γραφήματος. (Ένα γράφημα ονομάζεται συνεκτικό αν μπορούμε να μετακινηθούμε από κάθε κορυφή σε κάθε άλλη μέσω ακμών.)

Τύπος Euler

Έστω ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα με V κορυφές, E ακμές, και F έδρες. Τότε:

$$V - E + F = 2$$

Επειδή κάθε κυρτό πολύεδρο μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα επίπεδο γράφημα, ο τύπος του Euler ισχύει και για τα κυρτά πολύεδρα.