



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B27

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Ναδειχθεί ότι ο αριθμός $\cos(1^\circ)$ είναι άρρητος.

Προτεινόμενη Λύση 1

Λήμμα: Αν ο $\cos \vartheta$ είναι ρητός, τότε και ο $\cos n\vartheta$ είναι ρητός για κάθε φυσικό n .

Απόδειξη λήμματος: Προχωράμε με επαγωγή στο n . Για $n = 1$ είναι άμεσο, ενώ για $n = 2$ προκύπτει χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\cos 2\vartheta = 2\cos^2 \vartheta - 1$$

Έστω λοιπόν ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = k - 1$, και $n = k$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$. Από τους τύπους

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

παίρνουμε:

$$\cos(x + y) = 2\cos x \cos y - \cos(x - y)$$

Για $x = k\vartheta$ και $y = \vartheta$ αυτό δίνει:

$$\cos((k + 1)\vartheta) = 2\cos k\vartheta \cos \vartheta - \cos((k - 1)\vartheta)$$

Άρα και ο $\cos((k + 1)\vartheta)$ είναι ρητός. Από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώθηκε.

Αν λοιπόν ο $\cos(1^\circ)$ ήταν ρητός, τότε και ο $\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$ θα ήταν ρητός, άτοπο.

Προτεινόμενη Λύση 2

Έστω $T_n(x)$ το n -οστό πολυώνυμο Chebyshev (δείτε στα σχόλια). Τότε

$$T_{30}(\cos(1^\circ)) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Επειδή το T_{30} έχει ακέραιους συντελεστές, αν ο $\cos(1^\circ)$ ήταν ρητός, τότε και ο $T_{30}(\cos(1^\circ))$ θα ήταν ρητός, άτοπο.

Προτεινόμενη Λύση 3

Θέτουμε $z = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$, όπου $\vartheta = \pi/180$. Από το θεώρημα De Moivre (δείτε στα σχόλια) έχουμε:

$$\begin{aligned}\cos(30\vartheta) + i \sin(30\vartheta) &= (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^{30} \\ &= \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} \cos^k(\vartheta) i^{30-k} \sin^{30-k}(\vartheta)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος στο δεξί μέλος είναι πραγματικός αν ο k είναι άρτιος, και φανταστικός αν ο k είναι περιττός. Εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\cos(30\vartheta) &= \sum_{m=0}^{15} \binom{30}{2m} \cos^{2m}(\vartheta) i^{30-2m} \sin^{30-2m}(\vartheta) \\ &= \sum_{m=0}^{15} \binom{30}{2m} \cos^{2m}(\vartheta) (-1)^{15-m} (1 - \cos^2(\vartheta))^{15-m}\end{aligned}$$

Αν λοιπόν ο $\cos(1^\circ) = \cos(\vartheta)$ ήταν ρητός, τότε και ο $\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$ θα ήταν ρητός, άτοπο.

Σχόλια στην Προτεινόμενη Λύση 1:

Προσέξτε ότι για να δείξουμε πως ο $\cos((k+1)\vartheta)$ είναι ρητός, χρειαστήκαμε την υπόθεση ότι τόσο ο $\cos(k\vartheta)$ όσο και ο $\cos((k-1)\vartheta)$ είναι ρητοί. Για να λειτουργήσει λοιπόν σωστά η επαγωγή χρειαζόμαστε να αποδείξουμε τις αρχικές συνθήκες τόσο για $n=1$ όσο και για $n=2$.

Σχόλια στην Προτεινόμενη Λύση 2:

Τα πολυώνυμα Chebyshev ορίζονται από τις αρχικές συνθήκες $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, και την αναδρομική σχέση:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

Επαγωγικά, όπως και στην «Προτεινόμενη Λύση 1» μπορεί ναδειχθεί ότι $T_n(\cos \vartheta) = \cos n\vartheta$. Ισοδύναμα, για $-1 \leq x \leq 1$, ισχύει ότι $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Χρησιμοποιώντας την θεωρία των αναδρομικών σχέσεων, όπως π.χ. εμφανίζεται στην λύση του [OLY2017-B19](#), μπορεί ναδειχθεί ότι αν $|x| \geq 1$, τότε

$$T_n(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$$

Μάλιστα η πιο πάνω σχέση ισχύει ακόμη και για $|x| < 1$ αρκεί να εργαστούμε στους μιγαδικούς αριθμούς.

Σχόλια στην Προτεινόμενη Λύση 3:

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς. Ορίζουμε ένα καινούργιο αριθμό, μη πραγματικό, τον οποίο συμβολίζουμε με i και είναι λύση της εξίσωσης. Δηλαδή ισχύει ότι $i^2 = -1$. Ορίζουμε τώρα το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Ονομάζουμε το a ακέραιο μέρος και το bi φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $a + bi$. Οι πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών γίνονται ακολουθώντας όλους τους γνωστούς αλγεβρικούς κανόνες μαζί με την επιπλέον συνθήκη $i^2 = -1$. Π.χ.

$$(2 + 3i) + (1 - 5i) = 3 - 2i \quad \text{και} \quad (2 + 3i)(1 - 5i) = 2 - 10i + 3i - 15i^2 = 17 - 7i$$

Δοθέντος ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$, ονομάζουμε συζυγή αυτού του αριθμού τον μιγαδικό αριθμό $a - bi$ τον οποίο και συμβολίζουμε ως $\bar{z}$. Παρατηρούμε ότι $z\bar{z} = a^2 + b^2$. Αυτή η παρατήρηση είναι βοηθητική για την διαίρεση μιγαδικών αριθμών. Η διαίρεση γίνεται πολλαπλασιάζοντας τον παρονομαστή με τον συζυγή του. Π.χ.

$$\frac{1 - 2i}{3 - i} = \frac{1 - 2i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{(3 + 2) - (6 + 1)i}{9 + 1} = \frac{5 - 7i}{10}$$

Με αυτούς τους συμβολισμούς μπορούμε τώρα να λύσουμε κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση. Αν η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$ είναι αρνητική τότε το πολυώνυμο $ax^2 + bx + c = 0$ έχει ρίζες τις

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

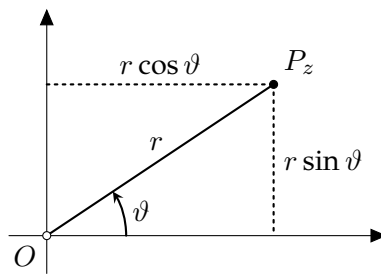
Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο $ax^2 + bx + c$ ως $a(x - x_1)(x - x_2)$. Π.χ. το πολυώνυμο $x^2 + 2x + 2$ έχει ρίζες τις $-1 \pm \sqrt{2}$ και μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ως $x^2 + 2x + 2 = (x + 1 - i\sqrt{2})(x + 1 + i\sqrt{2})$. Πιο γενικά, ισχύει το εξής:

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Έστω πολυώνυμο $f(z)$ βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές. Τότε υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $c, z_1, z_2, \dots, z_n$ ώστε:

$$f(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς στο επίπεδο τοποθετώντας τον αριθμό $z = a + bi$ στο σημείο P_z με συντεταγμένες (a, b) . Ονομάζουμε την απόσταση $\sqrt{a^2 + b^2}$ του P_z από την αρχή των αξόνων O μέτρο του μιγαδικού αριθμού z , και την συμβολίζουμε με $|z|$. Ονομάζουμε την γωνία που σχηματίζει ο θετικός ημιάξονας Ox με το τμήμα OP_z όρισμα του μιγαδικού αριθμού z , και την συμβολίζουμε με $\arg z$. Την γωνία την μετράμε σε ακτίνια, και πάντοτε αριστερόστροφα ξεκινώντας από τον ημιάξονα Ox , όπως στο πιο κάτω σχήμα.



Αν λοιπόν γράψουμε $r = |z|$ και $\vartheta = \arg z$ τότε ισχύει ότι:

$$z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

Αυτή ονομάζεται τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού z .

Αν $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ και $w = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ τότε μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες ότι

$$zw = rs(\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi))$$

και

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos \vartheta - i \sin \vartheta) = \frac{1}{r}(\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta))$$

Επαγωγικά λοιπόν παίρνουμε το εξής:

Θεώρημα De Moivre

Για κάθε ακέραιο n ισχύει ότι:

$$(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)$$