



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B31

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ώστε

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Πηγή: Ρουμανία 1997

Προτεινόμενη Λύση

Ορίζουμε την συνάρτηση $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ως $g(x) = f(\sqrt{x})$. Έστω $a, b \in [0, \infty)$. Θέτω:

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{2}} \quad \text{και} \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}}{2}}$$

(Δείτε στα σχόλια για το πως σκεφτήκαμε να κάνουμε αυτήν την επιλογή.)

Τότε $x^2 - y^2 = \sqrt{a}$, $2xy = \sqrt{b}$ και $x^2 + y^2 = \sqrt{a+b}$. Άρα:

$$g(a+b) = f(\sqrt{a+b}) = f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy) = f(\sqrt{a}) + f(\sqrt{b}) = g(a) + g(b)$$

Δηλαδή,

$$g(a+b) = g(a) + g(b) \tag{1}$$

για κάθε $a, b \geq 0$.

Θέτοντας $a = b = 0$ στην (1), παίρνουμε $g(0) = 2g(0)$, οπότε $g(0) = 0$. Με επαγωγή στο n , είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$g(nx) = ng(x) \tag{2}$$

για κάθε $x \in [0, \infty)$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $c = g(1)$. Από την (2), παίρνουμε $g(n) = nc$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε παίρνουμε

και $ng(\frac{m}{n}) = g(m) = mc$. Άρα

$$g(q) = cq \quad (3)$$

για κάθε μη αρνητικό ρητό q .

Θα δείξουμε ότι $g(x) = cx$ για κάθε $x \geq 0$. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει. Έστω $t \geq 0$ με $g(t) > ct$. Έστω q ρητός με $ct < cq < g(t)$. Τότε:

$$g(q - t) = g(q) - g(t) = cq - g(t) < 0$$

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο αν υπάρχει $t \geq 0$ με $g(t) < ct$. Άρα $g(x) = cx$ για κάθε $x \geq 0$. Οπότε $f(x) = cx^2$ για κάθε $x \in [0, \infty)$. Για $a \geq 0$, θέτοντας $x = 0, y = \sqrt{a}$ στην αρχική συναρτησιακή, παίρνουμε:

$$ca^2 = f(a) = f(-a) + f(0) = f(-a)$$

Οπότε είναι επίσης και $f(x) = cx^2$ για κάθε $x \leq 0$. Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = cx^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι απλό ότι όλες αυτές οι συναρτήσεις ικανοποιούν την δοσμένη συναρτησιακή εξίσωση.

Σχόλια

Τα $2xy, x^2 - y^2, x^2 + y^2$ αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα, οπότε βλέπουμε άμεσα ότι μία λύση είναι η $f(x) = x^2$. Υποψιαζόμαστε ότι κάθε λύση είναι της μορφής $f(x) = cx^2$ για κάποια σταθερά c . Αυτό μας καθοδηγεί στο να ορίσουμε την συνάρτηση $g(x) = f(\sqrt{x})$ για την οποία ελπίζουμε να δείξουμε ότι $g(a + b) = g(a) + g(b)$. Ασφαλώς, για να έχει νόημα η g , πρέπει να πάρουμε ως πεδίο ορισμού το $[0, \infty)$. Αν μπορέσουμε να βρούμε $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $x^2 - y^2 = \sqrt{a}, 2xy = \sqrt{b}$ και $x^2 + y^2 = \sqrt{a + b}$ τότε θα πετύχουμε αυτόν τον σκοπό. Λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \sqrt{a} \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{a + b} \end{aligned}$$

παίρνουμε τις τιμές των x, y που χρησιμοποιήσαμε στην λύση. Η $2xy = \sqrt{b}$ προκύπτει από τις τιμές που πήραμε, όπως θα αναμέναμε να συμβεί.

Συναρτησιακή Εξίσωση Cauchy

Η συναρτησιακή εξίσωση

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

για $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται συναρτησιακή εξίσωση Cauchy.

Με επαγωγή, όπως και στην λύση του προβλήματος, μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(q) = cq$ για κάθε ρητό q . (Αν το έχουμε για θετικούς ρητούς

είναι απλό να το δείξουμε και για αρνητικούς ρητούς.)

Υποφιαζόμαστε ότι $f(x) = cx$ για κάθε x . Κάθε τέτοια λύση ονομάζεται γραμμική. Χωρίς οποιεσδήποτε άλλες επιπλέον συνθήκες, η συναρτησιακή εξίσωση Cauchy έχει και μη γραμμικές λύσεις οι οποίες είναι δύσκολο να περιγραφούν και θα αποφύγουμε να το πράξουμε. Υπάρχουν όμως κάποιες συνθήκες οι οποίες μας εγγυώνται ότι οι λύσεις θα είναι γραμμικές. Γράφουμε κάποιες από αυτές. Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο επιχείρημα όπως και στην πιο πάνω λύση για να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν μη γραμμικές λύσεις.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση Cauchy.

- (1) Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε είναι γραμμική.
- (2) Αν η f είναι συνεχής έστω και σε ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε είναι γραμμική.
- (3) Αν η f είναι μονότονη, τότε είναι γραμμική.
- (4) Αν η f είναι φραγμένη (είτε άνω είτε κάτω) τότε είναι γραμμική.

Στο πιο πάνω πρόβλημα ουσιαστικά αποδείξαμε το (4).