



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B32

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABC , και σημείο P πάνω στον περιγεγραμμένο του κύκλο. Έστω ότι η PA τέμνει την BC στο D , η PB τέμνει την AC στο E , και η PC τέμνει την AB στο F .

Ναδειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου DEF είναι το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ABC .

Πηγή: ΗΠΑ 2017

Προτεινόμενη Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε βαρυκεντρικές συντεταγμένες. (Δείτε τα σχόλια.)

Έστω λοιπόν ότι $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ και $C = (0, 0, 1)$ σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες. Αφού το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, το περίκεντρο είναι το ίδιο με το βαρύκεντρο οπότε έχει συντεταγμένες $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας το τρίγωνο ABC έχει πλευρά μήκους 1. Τότε $\overrightarrow{OA} = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ και άρα:

$$(OA)^2 = - \left[\left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{2}{3} \right) \left(-\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{3}$$

Οπότε το $P = (p, q, r)$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(OP)^2 = - \left[\left(q - \frac{1}{3} \right) \left(r - \frac{1}{3} \right) + \left(r - \frac{1}{3} \right) \left(p - \frac{1}{3} \right) + \left(p - \frac{1}{3} \right) \left(q - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{3}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $p + q + r = 1$ καταλήγουμε στην:

$$pq + qr + rp = 0 \quad (1)$$

Η ευθεία AP έχει εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1 & p & x \\ 0 & q & y \\ 0 & r & z \end{vmatrix} = 0$$

δηλαδή $qz = ry$. Η ευθεία BC έχει εξίσωση $x = 0$. Οπότε έχουμε $D = (0, \frac{q}{q+r}, \frac{r}{q+r})$. Ομοίως βρίσκουμε $E = (\frac{p}{p+r}, 0, \frac{r}{p+r})$ και $F = (\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q}, 0)$. Άρα

$$\begin{aligned} \frac{(DEF)}{(ABC)} &= \frac{1}{(p+q)(q+r)(r+p)} \begin{vmatrix} 0 & p & p \\ q & 0 & q \\ r & r & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{pqr}{(p+q)(q+r)(r+p)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2pqr}{(p+q)(q+r)(r+p)} \end{aligned}$$

Όμως:

$$(p+q)(q+r)(r+p) = (p+q+r)(pq+qr+rp) - pqr = -pqr$$

από την (1).

Το ζητούμενο έπεται. Λαμβάνουμε μάλιστα ότι το τρίγωνο DEF έχει αντίθετη φορά από το τρίγωνο ABC .

Σχόλια

Στην πιο πάνω λύση χρησιμοποιήσαμε βαρυκετρικές συντεταγμένες. Το πλεονέκτημά τους έναντι των Καρτεσιανών συντεταγμένων είναι ότι μας βοηθούν να εκμεταλλευτούμε την συμμετρία του τριγώνου, κάτι που δεν μπορούμε να κάνουμε πάντα στις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Π.χ. όπως θα δούμε πιο κάτω οι (μη ομογενείς) βαρυκεντρικές συντεταγμένες του εγκέντρου του τριγώνου ABC είναι $(a : b : c)$. Ότι Καρτεσιανές συντεταγμένες και να βάλουμε στα σημεία A, B, C , δύσκολα θα καταλήξουμε σε μια τόσο απλή και συμμετρική μορφή για τις συντεταγμένες του εγκέντρου ή κάποιου άλλου σημείου του τριγώνου.

Έστω τρίγωνο ABC , και έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B, C . Για κάθε σημείο P του επιπέδου, υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί x, y, z με $x + y + z = 1$ ώστε

$$\mathbf{p} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

όπου $\mathbf{p}$ το διάνυσμα θέσης του P . Οι συντεταγμένες (x, y, z) ονομάζονται βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου P (σε σχέση με το τρίγωνο ABC). Ο λόγος που ονομάζονται έτσι, είναι διότι το P είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου αν τα σημεία A, B, C έχουν βάρη x, y, z αντίστοιχα.

Προφανώς έχουμε $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ και $C = (0, 0, 1)$ σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες.

Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του P μπορούν να υπολογιστούν από τον τύπο:

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[APC]}{[ABC]}, \frac{[ABP]}{[ABC]} \right) \quad (2)$$

όπου με τις αγκύλες δηλώνουμε το προσσημασμένο εμβαδόν. (Δηλαδή θετικό αν το τρίγωνο έχει αντιωρολογιακή φορά και αρνητικό αν έχει ωρολογιακή φορά.)

Η συντεταγμένη x θα είναι θετική αν τα A, P βρίσκονται στην ίδια μεριά της ευθείας BC και αρνητική αν βρίσκονται σε διαφορετικές μεριές. (Θα ισούται με 0 αν το P βρίσκεται πάνω στην ευθεία BC .)

Δοθέντων δύο σημείων $P = (p_1, p_2, p_3)$ και $Q = (q_1, q_2, q_3)$, η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα P, Q είναι η:

$$(p_1, p_2, p_3) + t(q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3), \quad t \in \mathbb{R}$$

Ισοδύναμα, η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & x \\ p_2 & q_2 & y \\ p_3 & q_3 & z \end{vmatrix} = 0$$

μαζί με την επιπλέον προϋπόθεση ότι $x + y + z = 1$.

Επομένως τρία σημεία $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ και $R = (r_1, r_2, r_3)$ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$

Μάλιστα η πιο πάνω ορίζουσα μας δίνει τον λόγο του εμβαδού του τριγώνου PQR ως προς το εμβαδόν του ABC . Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\frac{(PQR)}{(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

Ανάλογος τύπος με ορίζουσα υπάρχει και για τον έλεγχο αν τρεις ευθείες συντρέχουν. Οι ευθείες $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ και $a_3x + b_3y + c_3z = 0$ συντρέχουν αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Από τον ορισμό των βαρυκεντρικών συντεταγμένων είναι άμεσο ότι το βαρύκεντρο G του

ABC έχει βαρυκεντρικές συντεταγμένες $G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ή να μπορούμε να υπολογίσουμε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες των υπόλοιπων σημαντικών σημείων ενός τριγώνου. Συνήθως αυτές υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την (1). Δίνουμε ένα παράδειγμα για τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες του περικέντρου:

Έστω τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (K) με κέντρο O . Τότε έχουμε:

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\hat{A}$$

Αν λοιπόν R η ακτίνα του (K) , τότε $(OBC) = \frac{1}{2}R^2 \sin(2\hat{A})$. Παρατηρούμε ότι τα O και A είναι από την ίδια πλευρά της BC αν και μόνο αν η γωνία $\hat{A}$ είναι αμβλεία. Οπότε και για το προσημασμένο εμβαδόν έχουμε $[OBC] = \frac{1}{2}R^2 \sin(2\hat{A})$. Αντί να υπολογίσουμε και το εμβαδόν του τριγώνου ABC μπορούμε τώρα να γράψουμε

$$O = (\sin(2\hat{A}) : \sin(2\hat{B}) : \sin(2\hat{C}))$$

όπου ο συμβολισμός δηλώνει ότι δεν γράψαμε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες αλλά μια αναλογία αυτών. Για να πάρουμε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες αρκεί να τις «κανονικοποιήσουμε» διαιρώντας με το άθροισμά τους. Δηλαδή σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες είναι:

$$O = (k \sin(2\hat{A}), k \sin(2\hat{B}), k \sin(2\hat{C}))$$

όπου $k = \frac{1}{\sin(2\hat{A}) + \sin(2\hat{B}) + \sin(2\hat{C})}$. Πολύ συχνά βολεύει να εργαζόμαστε με μη ομογενείς συντεταγμένες και να τις κανονικοποιούμε στο τέλος. Το μόνο σημείο που πρέπει να είμαστε αρκετά προσεκτικοί είναι στον υπολογισμό των αποστάσεων που θα υπολογίσουμε αργότερα.

Ο πιο κάτω πίνακας δίνει τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες κάποιων βασικών σημείων του τριγώνου.

Βασικά σημεία τριγώνου σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες

Έστω τρίγωνο ABC με πλευρές μήκους a, b, c και γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Τότε τα βασικά του σημεία έχουν τις πιο κάτω μη ομογενείς βαρυκεντρικές συντεταγμένες:

Συμβολισμός	Ονομασία	Συντεταγμένες
G	Βαρύκεντρο	$(1 : 1 : 1)$
O	Περίκεντρο	$(\sin(2\hat{A}) : \sin(2\hat{B}) : \sin(2\hat{C}))$
I	Έγκεντρο	$(a : b : c)$
H	Ορθόκεντρο	$(\tan \hat{A} : \tan \hat{B} : \tan \hat{C})$
I_a	Παράκεντρο	$(-a : b : c)$

Δοθέντων δύο σημείων $P = (p_1, p_2, p_3)$ και $Q = (q_1, q_2, q_3)$ σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες έχουμε ότι:

$$(PQ)^2 = -a(p_2 - q_2)(p_3 - q_3) - b(p_1 - q_1)(p_3 - q_3) - c(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)$$

Στον πιο πάνω τύπο είναι σημαντικό τα σημεία να βρίσκονται σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες. Πρέπει δηλαδή να κανονικοποιήσουμε τα σημεία προτού χρησιμοποιήσουμε τον τύπο.

Αν γνωρίζουμε το κέντρο και την ακτίνα ενός κύκλος τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της απόστασης για να βρούμε την εξίσωση του κύκλου όπως κάναμε και στην λύση του προβλήματος.

