



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A01

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Ναδειχθεί ότι υπάρχει πολλαπλάσιο του 2018 του οποίου η δεκαδική αναπαράσταση περιέχει μόνο οχτάρια.

Προτεινόμενη Λύση 1

Αρκεί να βρούμε πολλαπλάσιο του 1009 του οποίου η δεκαδική αναπαράσταση περιέχει μόνο άσους. Πολλαπλασιάζοντας με το 8, παίρνουμε ένα πολλαπλάσιο του $8 \cdot 1009$, και άρα και του $2 \cdot 1009 = 2018$, του οποίου η δεκαδική αναπαράσταση περιέχει μόνο οχτάρια.

Κοιτάζουμε τους αριθμούς 1, 11, 111, 1111, ... Δύο από αυτούς πρέπει να είναι ισότιμοι modulo 1009. Έστω ότι:

$$\underbrace{1 \dots 1}_{r \text{ ψηφία}} \equiv \underbrace{1 \dots 1}_{s \text{ ψηφία}} \pmod{1009}$$

όπου $r > s$. Τότε:

$$\underbrace{1 \dots 1}_{r-s} \underbrace{0 \dots 0}_s \equiv 0 \pmod{1009}$$

Αφού $(1009, 10) = 1$, τότε:

$$\underbrace{1 \dots 1}_{r-s} \equiv 0 \pmod{1009}$$

όπως θέλαμε να δείξουμε.

Προτεινόμενη Λύση 2

Θέλουμε να βρούμε k ώστε το

$$\underbrace{8 \dots 8}_{k \text{ ψηφία}} = 8 \cdot \underbrace{1 \dots 1}_{k \text{ ψηφία}} = 8 \cdot \frac{10^k - 1}{9}$$

να είναι πολλαπλάσιο του 2018. Αφού $2018 = 2 \cdot 1009$, και $(9, 1009) = 1$, αρκεί να βρούμε

k ώστε $10^k - 1 \equiv 0 \pmod{1009}$. Από το Θεώρημα του Euler, αφού $(10, 1009) = 1$, αρκεί να πάρουμε $k = \varphi(1009)$.

