



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A02

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται δύο μη σταθερά πολυώνυμα $f(x), g(x)$ ώστε $f(f(x)) = g(g(x))$ και $f(f(f(x))) = g(g(g(x)))$ για κάθε x . Ισχύει απαραίτητα ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε x ;

Πηγή: Τουρνουά Πόλεων 2004

Προτεινόμενη Λύση

Ορίζουμε:

$$A = \{a : f(f(x)) = a \text{ για κάποιο } x \in \mathbb{R}\}$$

Επειδή το $f(x)$ είναι μη σταθερό, τότε και το $f(f(x))$ είναι μη σταθερό. Άρα το σύνολο A είναι άπειρο. Έστω $a \in A$, και έστω $t \in \mathbb{R}$ ώστε $f(f(t)) = a$. Τότε:

$$f(a) = f(f(f(t))) = g(g(g(t))) = g(f(f(t))) = g(a)$$

Θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$. Τότε $h(a) = 0$ για κάθε $a \in A$. Εφόσον το σύνολο A είναι άπειρο, πρέπει το $h(x)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Άρα $f(x) = g(x)$ για κάθε x .