



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A03

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρείτε πόσα ζεύγη θετικών ακεραίων (x, y) ικανοποιούν την εξίσωση:

$$ΕΚΠ(x, y) - ΜΚΔ(x, y) = 2018$$

Πηγή: Carnegie Mellon 2017

Προτεινόμενη Λύση

Έστω d ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των x, y . Τότε μπορούμε να γράψουμε $x = da$ και $y = db$ όπου οι a, b είναι πρώτοι μεταξύ τους. Η εξίσωση γίνεται:

$$d(ab - 1) = 2018$$

Το 2018 γράφεται $2 \cdot 1009$ ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Άρα $d = 1, 2, 1009$ ή 2018.

Αν $d = 1$, τότε $ab = 2019 = 3 \cdot 673$. Υπάρχουν τέσσερα ζεύγη (a, b) με a, b πρώτους μεταξύ τους, ώστε $ab = 2019$. (Για κάθε πρώτο που διαιρεί το 2019, πρέπει να επιλέξουμε αν διαιρεί το a ή b . Απαγορεύεται να διαιρεί και τους δύο.)

Αν $d = 2$, τότε $ab = 1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$. Υπάρχουν οκτώ ζεύγη (a, b) με a, b πρώτους μεταξύ τους, ώστε $ab = 1010$.

Αν $d = 1009$, τότε $ab = 3$. Υπάρχουν δύο ζεύγη (a, b) με a, b πρώτους μεταξύ τους, ώστε $ab = 3$.

Αν $d = 2018$, τότε $ab = 2$. Υπάρχουν δύο ζεύγη (a, b) με a, b πρώτους μεταξύ τους, ώστε $ab = 2$.

Συνολικά λοιπόν υπάρχουν 16 ζεύγη που ικανοποιούν την εξίσωση.