



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A05

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται n σημεία στην περιφέρεια ενός κύκλου. Φέρνουμε όλα τα ευθύγραμμο τμήματα τα οποία συνδέουν αυτά τα σημεία. Γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχουν τρία ευθύγραμμο τμήματα τα οποία να συντρέχουν.

Σε πόσα χωρία (κομμάτια) χωρίζουν τον κύκλο;

Προτεινόμενη Λύση

Αρχικά έχουμε ένα κομμάτι. Κάθε νέο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε, χωρίζει κάθε κομμάτι από το οποίο περνά στα δύο. Αν το ευθύγραμμο τμήμα συναντά k άλλα ευθύγραμμο τμήματα μέσα στον κύκλο, τότε περνά από $k + 1$ κομμάτια, και άρα δημιουργεί $k + 1$ νέα κομμάτια.

Επειδή έχουμε $\binom{n}{2}$ ευθύγραμμο τμήματα, τότε στο τέλος θα έχουμε

$$1 + \binom{n}{2} + A_n$$

κομμάτια, όπου με A_n συμβολίζουμε το πλήθος των σημείων τομής των ευθύγραμμων τμημάτων που βρίσκονται μέσα στον κύκλο. Κάθε σημείο τομής δύο ευθύγραμμων τμημάτων, αντιστοιχεί στα τέσσερα άκρα αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων. Αντιστρόφως, κάθε τέσσερα σημεία της περιφέρειας του κύκλου δίνουν ακριβώς ένα σημείο τομής, το σημείο τομής των διαγωνίων του κυρτού τετραπλεύρου που σχηματίζουν. Άρα $A_n = \binom{n}{4}$ και έχουμε συνολικά

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

κομμάτια.