



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A07

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται φυσικοί αριθμοί n, m . Ναδειχθεί ότι ο αριθμός

$$\frac{(2n)!(2m)!}{m!n!(m+n)!}$$

είναι ακέραιος.

Προτεινόμενη Λύση 1

Αρκεί να δείξουμε (δείτε στα σχόλια για τον ορισμό) ότι

$$\nu_p((2n)!) + \nu_p((2m)!) \geq \nu_p(n!) + \nu_p(m!) + \nu_p((n+m)!)$$

για κάθε πρώτο p .

Από τον τύπο του Lagrange, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{p^k} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+m}{p^k} \right\rfloor$$

για κάθε πρώτο p και κάθε θετικό ακέραιο k .

Θα δείξουμε πιο γενικά ότι

$$\left\lfloor \frac{2n}{t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{t} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+m}{t} \right\rfloor$$

για κάθε θετικό ακέραιο t .

Ας υποθέσουμε ότι $n = qt + r$ και $m = q't + r'$ όπου $0 \leq r, r' \leq t - 1$. Τότε έχουμε

$$\left\lfloor \frac{2n}{t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{t} \right\rfloor \geq 2q + 2q'$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $2r \leq t - 1$ και $2r' \leq t - 1$. Επίσης

$$\left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+m}{t} \right\rfloor \leq q + q' + (q + q' + 1) = 2q + 2q' + 1$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $r + r' \geq t$.

Για να μην ισχύει λοιπόν ο ισχυρισμός, αφού και τα δύο μέρη είναι ακέραιοι, θα πρέπει

να έχουμε ισότητα και στις δύο πιο πάνω σχέσεις. Αυτό όμως είναι αδύνατον αφού οι συνθήκες $2r \leq t-1$ και $2r' \leq t-1$ δίνουν ότι $r+r' \leq t-1$

Προτεινόμενη Λύση 2

Γράφουμε:

$$A(m, n) = \frac{(2n)!(2m)!}{m!n!(m+n)!}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$A(m+1, n) = \frac{(2n)!(2m+2)!}{(m+1)!n!(m+n+1)!} = \frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)(m+n+1)} A(m, n) = \frac{2(2m+1)}{m+n+1} A(m, n)$$

και ομοίως:

$$A(m, n+1) = \frac{2(2n+1)}{m+n+1} A(m, n)$$

Προσθέτοντας, παίρνουμε:

$$A(m+1, n) + A(m, n+1) = 4A(m, n)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε φυσικούς m, n ο $A(m, n)$ είναι ακέραιος. Θα προχωρήσουμε με επαγωγή στο n .

Για $n = 0$ έχουμε $A(m, n) = A(m, 0) = \frac{(2m)!}{m!m!} = \binom{2m}{m}$ ο οποίος είναι ακέραιος. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο $A(m, n)$ είναι ακέραιος για $n = k$ και για κάθε φυσικό m . Τότε όμως έχουμε

$$A(m, k+1) = 4A(m, k) - A(m+1, k)$$

Από την επαγωγική υπόθεση, τόσο ο $A(m, k)$ όσο και ο $A(m+1, k)$ είναι ακέραιοι. Άρα το ίδιο ισχύει και για τον $A(m, k+1)$. Από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Σχόλια

Αν n φυσικός αριθμός και p πρώτος αριθμός, τότε με $\nu_p(n)$ συμβολίζουμε την μεγαλύτερη δύναμη του p η οποία διαιρεί τον n . Π.χ. $n_5(100) = 2$ επειδή $5^2 | 100$ αλλά $5^3 \nmid 100$.

Αν x πραγματικός αριθμός, τότε με $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x και με $\lceil x \rceil$ συμβολίζουμε τον μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του x . Π.χ. $\lfloor \pi \rfloor = 3$ και $\lceil \pi \rceil = 4$. Επίσης $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ και $\lceil -\pi \rceil = -3$.

Τύπος Lagrange

Αν n φυσικός αριθμός και p πρώτος αριθμός, τότε

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor n/p^k \rfloor$$

Π.χ

$$n_3(100!) = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor + \lfloor \frac{100}{9} \rfloor + \lfloor \frac{100}{27} \rfloor + \lfloor \frac{100}{81} \rfloor = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$$

Αν και στον τύπο του Lagrange το άθροισμα φαίνεται άπειρο, αυτό είναι πεπερασμένο αφού μόνο πεπερασμένοι όροι είναι διαφορετικοί του 0.

Ο τύπος του Lagrange αποδεικνύεται παρατηρώντας ότι υπάρχουν $\sum_{k=1}^{\infty} \lfloor n/p \rfloor$ πολλαπλάσια του p τα οποία είναι μικρότερα ή ίσα του n , $\sum_{k=1}^{\infty} \lfloor n/p^2 \rfloor$ πολλαπλάσια του p^2 τα οποία είναι μικρότερα ή ίσα του n , κ.ο.κ. Ένα πολλαπλάσιο του p^m αλλά όχι του p^{m+1} , το οποίο είναι μικρότερο ή ίσο του n , ασφαλώς συνεισφέρει m στο $\nu_p(n!)$. Συνεισφέρει όμως και m στο $\sum_{k=1}^{\infty} \lfloor n/p^k \rfloor$ αφού συνεισφέρει από 1 σε κάθε $\lfloor n/p^k \rfloor$ με $p^k \leq m$.