



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A08

Πρόβλημα

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ABC$ με $\angle A = 90^\circ$, AH ύψος του και P, Q τα ίχνη των καθέτων από το H στις AB, AC , αντίστοιχα. Έστω M τυχαίο σημείο πάνω στην ευθεία PQ . Η ευθεία που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στην MH τέμνει τις ευθείες AB, AC στα σημεία R, S , αντίστοιχα.

- (α) Να δείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\triangle ARS$ διέρχεται πάντοτε από το σημείο H .
- (β) Έστω M_1 μια άλλη θέση του σημείου M πάνω στην ευθεία PQ , με αντίστοιχα σημεία των R, S τα R_1, S_1 . Να δείξετε ότι ο λόγος $\frac{RR_1}{SS_1}$ είναι σταθερός.
- (γ) Το σημείο K είναι το συμμετρικό του H ως προς το M . Η ευθεία που διέρχεται από K και είναι κάθετη στην PQ τέμνει την ευθεία RS στο σημείο D . Να δείξετε ότι $\angle BHR = \angle DHR$ και $\angle DHS = \angle CHS$.