



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A08
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

Πρόβλημα

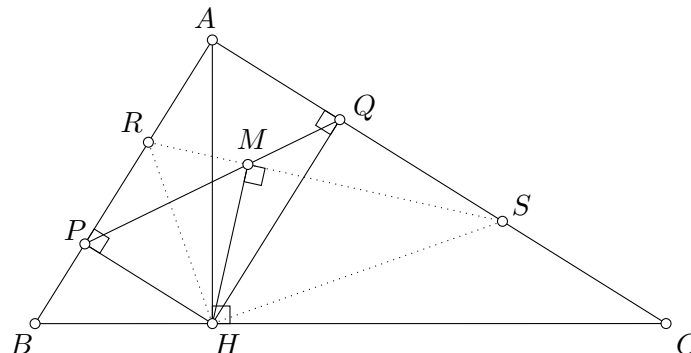
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ABC$ με $\angle A = 90^\circ$, AH ύψος του και P, Q τα ίχνη των καθέτων από το H στις AB, AC , αντίστοιχα. Έστω M τυχαίο σημείο πάνω στην ευθεία PQ . Η ευθεία που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στην MH τέμνει τις ευθείες AB, AC στα σημεία R, S , αντίστοιχα.

- (α) Να δείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\triangle ARS$ διέρχεται πάντοτε από το σημείο H .
- (β) Έστω M_1 μια άλλη θέση του σημείου M πάνω στην ευθεία PQ , με αντίστοιχα σημεία των R, S τα R_1, S_1 . Να δείξετε ότι ο λόγος $\frac{RR_1}{SS_1}$ είναι σταθερός.
- (γ) Το σημείο K είναι το συμμετρικό του H ως προς το M . Η ευθεία που διέρχεται από K και είναι κάθετη στην PQ τέμνει την ευθεία RS στο σημείο D . Να δείξετε ότι $\angle BHR = \angle DHR$ και $\angle DHS = \angle CHS$.

Πηγή: Βιετνάμ, 1974

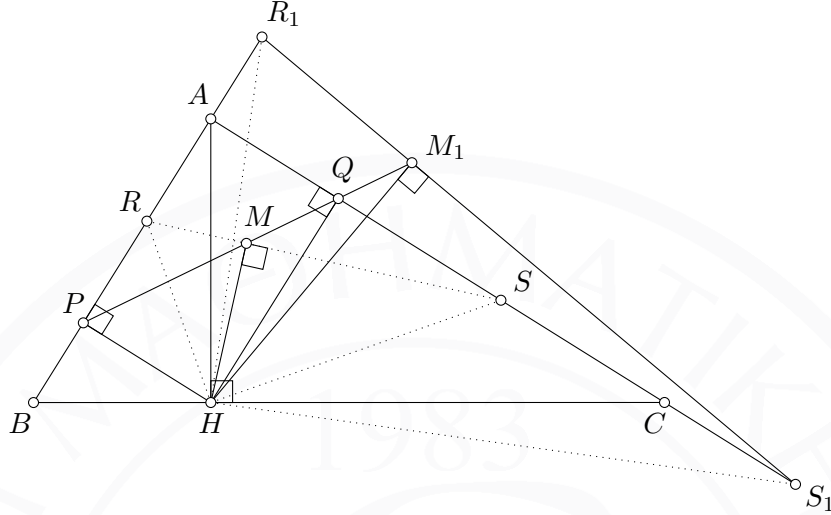
Προτεινόμενη Λύση

- (α) Παρατηρούμε ότι τα τετράπλευρα $HMQS$ και $HMRP$ είναι εγγράψιμα, αφού ισχύει $\angle HMS = \angle HQS = 90^\circ$, $\angle HMR = \angle HPR = 90^\circ$. Έτσι, $\angle HSQ = \angle HRP$.



Αφού ισχύει $\angle HRP = 180^\circ - \angle ARH$, τότε $\angle HSQ = 180^\circ - \angle ARH$ ή ισοδύναμα $\angle HSQ + \angle ARH = 180^\circ$. Επομένως, το τετράπλευρο $ARHS$ είναι εγγράψιμο και το ζητούμενο έπεται.

(β) Το τετράπλευρο AR_1S_1H είναι εγγράψιμο. Έτσι, $\angle AR_1H = \angle AS_1H$.



Τα τρίγωνα $\triangle HPR_1$ και $\triangle HQS_1$ είναι όμοια μεταξύ τους. Έτσι:

$$\frac{PR_1}{QS_1} = \frac{HP}{HQ}$$

Με ανάλογο τρόπο, έχουμε ότι:

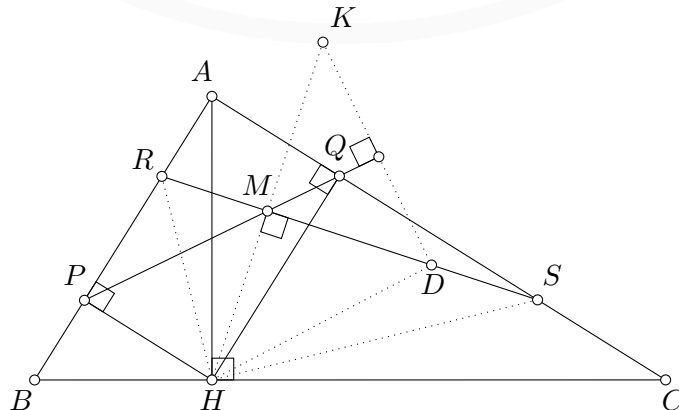
$$\frac{PR}{QS} = \frac{HP}{HQ}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{HP}{HQ} = \frac{PR_1}{QS_1} = \frac{PR}{QS} = \frac{PR_1 - PR}{QS_1 - QS} = \frac{RR_1}{SS_1}$$

Αφού τα σημεία H, P, Q είναι σταθερά, τότε και ο λόγος $\frac{HP}{HQ}$ είναι σταθερός και το ζητούμενο έπεται.

(γ) Λόγω συμμετρίας, έχουμε ότι $\angle RKS = \angle RHS$.



Αφού το τετράπλευρο $ARHS$ είναι εγγράψιμο, τότε το σημείο K ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραπλεύρου $ARHS$. Έτσι, το τετράπλευρο $ARHK$ είναι και αυτό εγγράψιμο. Παρατηρούμε ότι $\angle PRH = \angle AKH$. Τώρα, αφού το τετράπλευρο $HPRM$ είναι εγγράψιμο, τότε $\angle PRH = \angle PMH$. Επομένως, έχουμε ότι $\angle PMH = \angle AKH$, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $AK \parallel PM$.

Από την υπόθεση, έχουμε ότι $KD \perp PQ$. Έτσι, έχουμε ότι $KD \perp AK$ και συμπεραίνουμε ότι $\angle DKR + \angle AKR = 90^\circ$. Επίσης, $\angle BHR + \angle AHR = 90^\circ$. Από το γεγονός ότι το τετράπλευρο $ARHK$ είναι εγγράψιμο, έχουμε ότι $\angle AKR = \angle AHR$. Έτσι, $\angle DKR = \angle BHR$. Σημειώνουμε επίσης ότι το σημείο K είναι το συμμετρικό του H ως προς την ευθεία RS . Έτσι, $\angle DKR = \angle DHR$ και έπεται ότι $\angle DHR = \angle BHR$.

Ομοίως, αφού $\angle BHR + \angle CHS = 90^\circ$, τότε $\angle DHR + \angle CHS = 90^\circ$. Έχοντας υπόψη το γεγονός ότι το τετράπλευρο $ARHS$ είναι εγγράψιμο, το οποίο μας δίνει ότι $\angle DHR + \angle DHS = 90^\circ$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\angle DHS = \angle CHS$.