



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A10

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται θετικοί πραγματικοί a, b . Ναδειχθεί ότι $(1+a)(a+b)(b+8) \geq 27ab$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Προτεινόμενη Λύση 1

Από την ανισότητα AM-ΓΜ έχουμε:

$$1+a = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}$$

Ομοίως παίρνουμε

$$a+b \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}} \quad \text{και} \quad b+8 \geq 3\sqrt[3]{4b}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες παίρνουμε το ζητούμενο.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a=2, b=2a, 8=2b$. Δηλαδή αν και μόνο αν $a=2, b=4$.

Προτεινόμενη Λύση 2

Από την ανισότητα Hölder, έχουμε

$$(1+a)^{1/3}(a+b)^{1/3}(b+8)^{1/3} \geq (a^{1/3}b^{1/3} + a^{1/3}b^{1/3}8^{1/3}) = 3(ab)^{1/3}$$

Υψώνοντας στην τρίτη, παίρνουμε το ζητούμενο. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\frac{a}{1} = \frac{b}{a}$ και $\frac{b}{a} = \frac{8}{b}$, το οποίο είναι ισοδύναμο με $a=2, b=4$.

Σχόλια

Αν στην Προτεινόμενη Λύση 1 δοκιμάζαμε απευθείας την AM-ΓΜ σε κάθε παρένθεση, θα παίρναμε:

$$(1+a)(a+b)(b+8) \geq (2\sqrt{a})(2\sqrt{ab})(2\sqrt{8b}) = 16\sqrt{2}ab$$

το οποίο δεν είναι όσο ισχυρό θέλουμε.

Ο λόγος που αυτό δεν δουλεύει, είναι επειδή η ισότητα θα ίσχυε αν και μόνο αν $a = 1, a = b, b = 8$ το οποίο είναι αδύνατο.

Δοκιμάζουμε λοιπόν την AM-ΓΜ με βάρη. Για $r > 0$ έχουμε:

$$1 + a = 1 + r \left(\frac{a}{r} \right) \geq (1 + r)^{r+1} \sqrt[r]{\left(\frac{a}{r} \right)^r} = (1 + r) \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{r}{r+1}}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $a = r$. Ομοίως, για $s, t > 0$ έχουμε

$$a + b \geq (1 + s)a^{\frac{1}{s+1}} \left(\frac{b}{s} \right)^{\frac{s}{s+1}} \quad \text{και} \quad b + 8 \geq (1 + t)b^{\frac{1}{t+1}} \left(\frac{8}{t} \right)^{\frac{t}{t+1}}$$

με ισότητα αν και μόνο αν $b = sa$ και $8 = bt$.

Επιπλέον όταν θα πολλαπλασιάσουμε τις τρεις ανισότητες, θέλουμε οι δυνάμεις των a και b να γίνουν ίσες με 1. Δηλαδή θέλουμε:

$$\frac{r}{r+1} + \frac{1}{s+1} = \frac{s}{s+1} + \frac{1}{t+1} = 1$$

Θέλουμε λοιπόν $r = s = t$ που μαζί με τις σχέσεις $a = r, b = sa, 8 = bt$ δίνουν $r = s = t = 2, a = 2, b = 4$. Αυτές ακριβώς τις ανισότητες χρησιμοποιήσαμε στην Προτεινόμενη Λύση 1.