



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A11

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (m, n) τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση:

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 10$$

Πηγή: Βρετανία 2017

Προτεινόμενη Λύση

Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα έχουμε:

$$(n - 3)^2 - 9 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{41}{4}$$

Άρα:

$$(2n - 6)^2 - 36 = (2m + 1)^2 - 41$$

και:

$$(2m + 1)^2 - (2n - 6)^2 = 5$$

Από διαφορά τετραγώνων παίρνουμε:

$$(2m - 2n + 7)(2m + 2n - 5) = 5$$

Θέτουμε $a = 2m - 2n + 7$, $b = 2m + 2n - 5$. Παρατηρούμε ότι $a + b = 4m + 2 > 0$. Επειδή $ab = 5$, πρέπει $(a, b) = (1, 5)$ ή $(a, b) = (5, 1)$. Άρα $a + b = 6 = 4m + 2$ που δίνει $m = 1$. Επίσης, $b - a = 4n - 12$. Όμως $b - a = 4$ ή $b - a = -4$. Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $n = 4$ και στην δεύτερη παίρνουμε $n = 2$.

Άρα οι μόνες λύσεις είναι οι $(1, 4)$ και $(1, 2)$.