



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A12
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοιζιάς

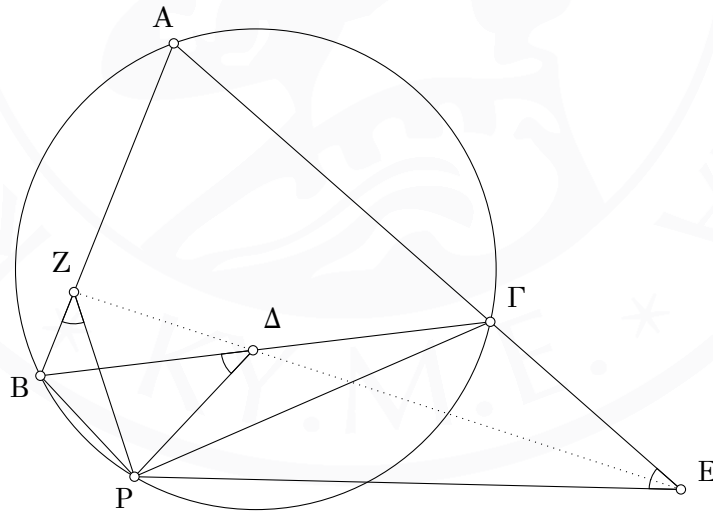
Πρόβλημα

Θεωρούμε σημείο P του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$. Από το σημείο P φέρουμε τρεις ευθείες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες $B\Gamma$, ΓA , AB στα σημεία Δ , E , Z , αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $\angle P\Delta B = \angle P\Gamma E = \angle PZB$. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ , E , Z είναι συνευθειακά.

Προτεινόμενη Λύση

Το πιο πάνω αποτέλεσμα είναι γνωστό ως **Θεώρημα Carnot**.

Όπως φαίνεται και στο πιο κάτω σχήμα, αρκεί να δείξουμε ότι $\angle P\Delta Z + \angle P\Delta E = 180^\circ$.



Αφού $\angle P\Delta B = \angle PZB$, τότε συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $BP\Delta Z$ είναι εγγράψιμο. Έτσι, $\angle P\Delta Z + \angle PBZ = 180^\circ$.

Το τετράπλευρο $ABP\Gamma$ είναι εγγράψιμο. Άρα, $\angle PBZ = \angle P\Gamma E$.

Αφού $\angle P\Delta E = \angle P\Gamma E$, τότε συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $P\Delta\Gamma E$ είναι εγγράψιμο. Έτσι, $\angle P\Delta E = \angle P\Gamma E = \angle PBZ$.

Τελικά, έχουμε

$$\angle PAZ + \angle PAE = \angle PAZ + \angle PBZ = 180^\circ,$$

και έχουμε τελειώσει.

